Vlastimil Dlab

II. Barycentrické souřadnice v rovině

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 2, 1–10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146661`

II. Barycentrické souřadnice v rovině

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. This is a continuation of the previous article [2]. It deals with the concept of a barycenter and the related concept of barycentric coordinates in a plane.

Tento příspěvek je pokračováním článku [2], který jsme věnovali definici těžiště dvou ohodnocených bodů. Týká se definice těžiště libovolného (konečného) počtu ohodnocených bodů a s ní těsně spjaté definice barycentrických souřadnic.

Těžiště

Omezíme se zde na tři různé ohodnocené body $(A, h_A), (B, h_B)$ a (C, h_C), které definují rovinu, obecně uloženou v (trojrozměrném) prostoru $\mathcal{P}$. Obdobně jako v předchozím článku [2], výraz

$$h_A\,\overrightarrow{XA} + h_B\,\overrightarrow{XB} + h_C\,\overrightarrow{XC}, \tag{1}$$

kde X je libovolný bod, můžeme přepsat do tvaru

$$(h_A + h_B + h_C)\,\overrightarrow{XA} + h_B\,\overrightarrow{AB} + h_C\,\overrightarrow{AC},$$

a tudíž, je-li $h_A + h_B + h_C \neq 0$, odvodit, že existuje *jednoznačně určený bod, těžiště*

$$T = T\{(A, h_A), (B, h_B), (C, h_C)\}$$

ohodnocených bodů (A, h_A), (B, h_B) a (C, h_C), splňující rovnost

$$h_A\,\overrightarrow{TA} + h_B\,\overrightarrow{TB} + h_C\,\overrightarrow{TC} = \vec{0}. \tag{2}$$

Pro libovolný bod X potom platí

$$h_A\,\overrightarrow{XA} + h_B\,\overrightarrow{XB} + h_C\,\overrightarrow{XC} =$$

$$= h_A\,(\overrightarrow{XT}+\overrightarrow{TA})+h_B\,(\overrightarrow{XT}+\overrightarrow{TB})+h_C\,(\overrightarrow{XT}+\overrightarrow{TC}) = (h_A+h_B+h_C)\,\overrightarrow{XT}.$$

Pro $X = A$ to tedy znamená, že T je snadné určit z rovnosti

$$\overrightarrow{AT} = \frac{h_B}{h_A + h_B + h_C}\,\overrightarrow{AB} + \frac{h_C}{h_A + h_B + h_C}\,\overrightarrow{AC}. \tag{3}$$

K určení těžiště tří bodů (a vlastně libovolného počtu bodů) můžeme využít konstrukce z článku pojednávajícího o dvou bodech [2].

Těžiště ohodnocených bodů (A, h_A) a (B, h_B) označme T_1 a těžiště ohodnocených bodů $(T_1, h_A + h_B)$ a (C, h_C) označme T_2. Dokážeme, že $T_2 = T$. Podle (1) z článku [2] je

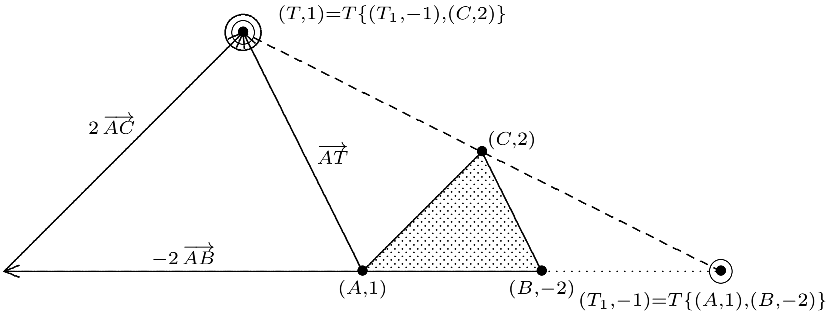
$$h_A\,\overrightarrow{T_1A} + h_B\,\overrightarrow{T_1B} = \vec{0} \quad \text{a} \quad (h_A + h_b)\,\overrightarrow{T_2T_1} + h_C\,\overrightarrow{T_2C} = \vec{0}.$$

Položíme-li $X = T_2$, máme podle (3) z článku [2]

$$h_A\,\overrightarrow{T_2A} + h_B\,\overrightarrow{T_2B} = (h_A + h_B)\,\overrightarrow{T_2T_1} = -h_C\,\overrightarrow{T_2C},$$

a tedy srovnáním s (2) je $T_2 = T$.

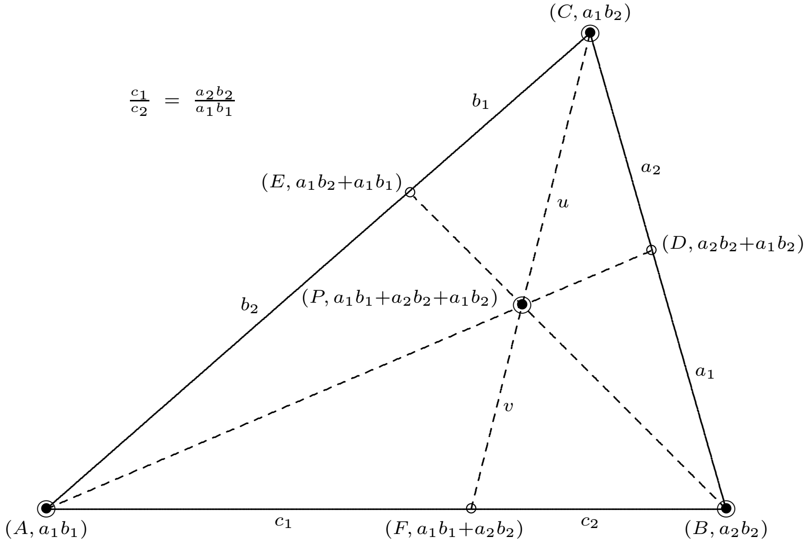
Konstrukci těžiště T ohodnocených bodů $(A, 1)$, $(B, -2)$ a $(C, 2)$ ilustruje obr. 1.



Obr. 1

Ilustrujme nyní důležitost pojmu těžiště na příkladech.

(a) Na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC zvolme postupně body D, E, F. Vzniklé úseky označme následujícím způsobem hodnotami $a_1 = |BD|$, $a_2 = |DC|$, $b_1 = |CE|$, $b_2 = |EA|$, $c_1 = |AF|$, $c_2 = |FB|$ (obr. 2):



Obr. 2

Bod D je tedy těžištěm ohodnocených bodů (B, a_2) a (C, a_1), tj.

$$D = T\{(B, a_2), (C, a_1)\} = T\{(B, a_2b_2), (C, a_1b_2)\},$$

a podobně $E = T\{(C, a_1b_2), (A, a_1b_1)\}$ a $F = T\{(A, a_1b_1), (B, a_2b_2)\}$. Důsledkem předešlé věty je tvrzení, že *úsečky AD, BE a CF (někdy nazývané ceviány) se protínají v jednom bodě P právě tehdy, když P je těžištěm ohodnocených bodů (A, a_1b_1), (B, a_2b_2) a (C, a_1b_2)*. Bod P je totiž těžištěm ohodnocených bodů (A, a_1b_1) a $(D, a_2b_2{+}a_1b_2)$, a podobně

$$P = T\{(B, a_2b_2), (E, a_1b_2 + a_1b_1)\} = T\{(C, a_1b_2), (F, a_1b_1 + a_2b_2)\}.$$

Tedy *bod P je společným bodem cevián AD, BE a CF právě tehdy, když*

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_2b_2}{a_1b_1}, \quad \textit{tj. když} \quad \frac{a_1b_1c_1}{a_2b_2c_2} = 1. \tag{4}$$

To je obsahem *věty Cèvovy*, právě dokázané pro případ, kdy bod P leží uvnitř trojúhelníku ABC. Obecný případ vyžaduje pojem orientované délky (viz poznámku na konci tohoto článku). Důkaz obecné Cèvovy věty bude podán v dalším článku [3].

Bezprostředním důsledkem této věty je řada vlastností trojúhelníku:

(1.a) Těžnice trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě, těžišti trojúhelníku T. Zde $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ a $c_1 = c_2$, a tedy platí (4).

(2.a) Osy úhlů trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě, středu vepsané kružnice. Zde použijeme kosinovou větu, která zaručuje, že poměr úseků vytknutých osou úhlu na protější straně se rovná poměru přilehlých stran, a tím dostáváme, že

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{a}{c} \quad \text{a} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{b}{a},$$

a tedy opět platí (4).

(3.a) Výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě. Zde použijeme definici kosinu úhlů α, β, γ příslušejících vrcholům A, B, C. Dostáváme

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha} \quad \text{a} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta},$$

a tedy opět platí triviálně (4).

(b) Vraťme se k situaci na obr. 2 a označme $u_3 = |CP|$ a $v_3 = |PF|$. Jelikož P je těžištěm ohodnocených bodů (C, a_1b_2) a $(F, a_1b_1 + a_2b_2)$, pro poměr $\frac{u_3}{v_3}$ dostáváme

$$\frac{u_3}{v_3} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{a_1b_2} = \frac{b_1}{b_2} + \frac{a_2}{a_1}. \tag{5}$$

Samozřejmě, podobný vztah platí též pro $u_1 = |AP|$, $v_1 = |PD|$ a $u_2 = |BP|$, $v_2 = |PE|$, a tedy

$$\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_1} + \frac{c_1}{c_2} + \frac{c_2}{c_1}.$$

Tyto jednoduché výrazy jsou někdy nazývány *Van Aubelovou větou* (Henri van Aubel (1830–1906)). Navíc dostáváme v tomto případě též

$$\frac{u_1}{u_1 + v_1} = \frac{a_1b_2 + a_2b_2}{a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2} \quad \text{a} \quad \frac{v_1}{u_1 + v_1} = \frac{a_1b_1}{a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2},$$

a tedy

$$\frac{u_1}{u_1 + v_1} + \frac{u_2}{u_2 + v_2} + \frac{u_3}{u_3 + v_3} = 2$$

a
$$\frac{v_1}{u_1+v_1}+\frac{v_2}{u_2+v_2}+\frac{v_3}{u_3+v_3}=1.$$

Popišme ještě několik bezprostředních důsledků vztahu (5).

(1.b) Těžnice trojúhelníku jsou těžištěm rozděleny v poměru 2 : 1, neboť podle (5) dostáváme v tomto případě

$$\frac{u}{v}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=2.$$

(2.b) Osa úhlu γ je rozdělena středem kružnice vepsané v poměru $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. To plyne opět bezprostředně z rovnosti (5), neboť, jak už bylo zmíněno, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{a}{c}$ a $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b}{c}$. Podobné výrazy platí pro osy úhlů α a β a snadno se přesvědčíme, že

$$\frac{u_1\,u_2\,u_3}{v_1\,v_2\,v_3}-\left(\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}+\frac{u_3}{v_3}\right)=2.$$

(3.b) Nechť nyní body D, E, F jsou paty výšek z vrcholů A, B, C. V tomto případě vyplývá ze vztahu (5) rovnost

$$\frac{u}{v}=\frac{a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma}{c\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Využijeme-li tedy předchozí značení (pro případ, že P je průsečík výšek), dostáváme rovnost

$$\frac{u_1\,u_2\,u_3}{v_1\,v_2\,v_3}=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Barycentrické souřadnice

Jestliže body A, B, C nejsou kolineární a $h_A+h_B+h_C\neq 0$, potom pro libovolný bod X existují podle (3) *jednoznačně* čísla a_X, b_X, c_X taková, že $a_X+b_X+c_X=1$ a

$$\overrightarrow{AX}=\frac{h_B}{h_A+h_B+h_C}\,\overrightarrow{AB}+\frac{h_C}{h_A+h_B+h_C}\,\overrightarrow{AC}.$$

Ve vztahu (3) stačí položit

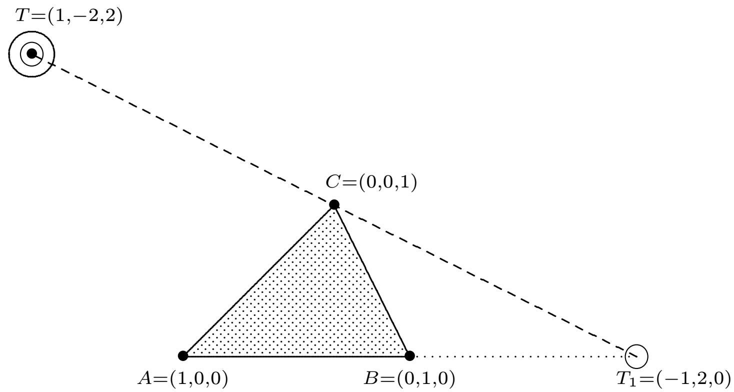
$$b_X=\frac{h_B}{h_A+h_B+h_C},\quad c_X=\frac{h_C}{h_A+h_B+h_C},\quad a_X=1-(b_X+c_X),$$

abychom obdrželi

$$a_X\overrightarrow{XA} + b_X\overrightarrow{XB} + c_X\overrightarrow{XC} = \vec{0}, \quad \text{kde } a_X + b_X + c_X = 1.$$

Trojice čísel a_X, b_X, c_X, jednoznačně přiřazená bodu X, jsou *barycentrické souřadnice bodu* $X = \{(A, a_X); (B, b_X); (C, c_X)\}$. Triviálně, barycentrické souřadnice bodů A, B, C jsou postupně $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Snadno se přesvědčíme, že barycentrické souřadnice těžiště trojúhelníku ABC, tj. těžiště ohodnocených bodů $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, jsou $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Vraťme se ještě ke konstrukci těžiště ohodnocených bodů $(A, 1)$, $(B, -2)$ a $(C, 2)$ na obr. 1 a doplňme ji barycentrickými souřadnicemi všech bodů (obr. 3).



Obr. 3

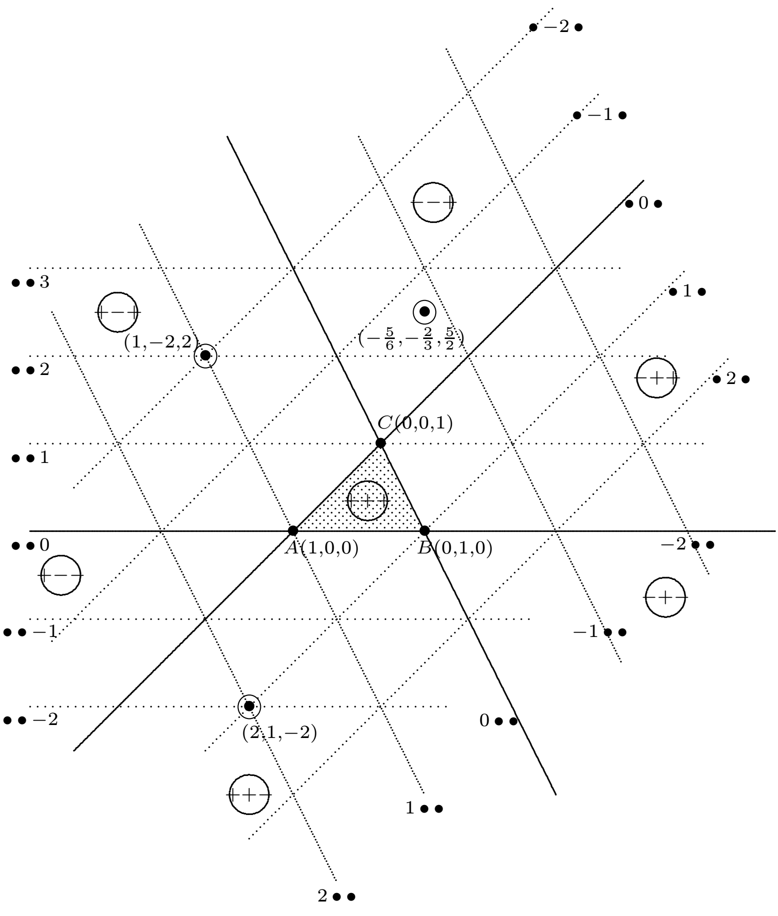
Poznámka 1. Jestliže $h_A + h_B + h_C = 0$, je výraz (1) nezávislý na volbě bodu X a body A, B, C jsou nutně kolineární. Jestliže $\overrightarrow{AC} = n\,\overrightarrow{AB}$, potom existuje bod X splňující (1) právě, když je ohodnocení bodů A, B, C dáno podmínkou $h_A = k(n-1)$, $h_B = -kn$, $h_C = k$ pro libovolná čísla k a n. Potom ovšem *každý* bod X přímky definované body A, B, C splňuje (1).

Poznamenejme ještě, že v případě $h_A + h_B + h_C \neq 0$ a $\overrightarrow{AC} = n\,\overrightarrow{AB}$, musí bod X splňující (1) ležet na přímce určené body A, B, C a ohodnocení h_A, h_B, h_C není určeno jednoznačně. Jestliže $\overrightarrow{AX} = k\,\overrightarrow{AB}$, potom právě všechna ohodnocení h_A, h_B, h_C splňující podmínku

$$kh_A + (k-1)h_B + (k-n)h_C = 0$$

definují totéž těžiště.

Na základě předešlé poznámky budeme v dalším vždy předpokládat, že body A, B, C nejsou kolineární a že $h_A + h_B + h_C = 1$. Následující obr. 4 ilustruje rozložení barycentrických souřadnic rovinných bodů a jak barycentrické souřadnice toho či onoho bodu X snadno určíme.



Obr. 4

Na obr. 4 vidíme, že přímky určené stranami trojúhelníku dělí rovinu na 7 oblastí. Tyto přímky jsou geometrickým místem bodů X, jejichž barycentrické souřadnice (a_X, b_X, c_X) splňují podmínku $a_X b_X c_X = 0$. Body A, B, C mají dvě barycentrické souřadnice nulové, ostatní body mají nulovou jednu souřadnici. Každá ze sedmi oblastí je charakterizována tím, že body, které v ní leží, mají stejné rozdělení kladných a záporných barycentrických souřadnic: To je na obr. 4 vyznačeno uvnitř malých kroužků trojicí symbolů $+$ a $-$. Tak např. $+++$ označuje, že právě body uvnitř trojúhelníku ABC mají souřadnice splňující podmínky $a_X > 0$, $b_X > 0$, $c_X > 0$, oblast označená $--+$ je oblast všech bodů X, pro něž platí $a_X < 0$, $b_X < 0$, $c_X > 0$, atd.

Velmi jednoduché je popsat barycentrické souřadnice bodů dané přímky; to je obsahem této věty.

Věta 1. *Nechť (a_R, b_R, c_R) a (a_S, b_S, c_S) jsou barycentrické souřadnice bodů R a S. Nechť X je bodem přímky p, kterou body R a S určují. Potom existuje (jednoznačně) číslo t takové, že*

$$(x_1, x_2, x_3) = ((1-t)a_R + ta_S, (1-t)b_R + tb_S, (1-t)c_R + tc_S)$$

jsou barycentrické souřadnice bodu X.

Důkaz. Jelikož

$$a_R\,\overrightarrow{RA} + b_R\,\overrightarrow{RB} + c_R\,\overrightarrow{RC} = \vec{0}, \quad a_S\,\overrightarrow{SA} + b_S\,\overrightarrow{SB} + c_S\,\overrightarrow{SC} = \vec{0}$$

a $\overrightarrow{RX} = t\,\overrightarrow{RS}$, vyžadovanou rovnost

$$x_1\,\overrightarrow{XA} + x_2\,\overrightarrow{XB} + x_3\,\overrightarrow{XC} = \vec{0}$$

snadno odvodíme rutinním výpočtem. Stačí využít jednoduchých vztahů $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XR} + \overrightarrow{RA} = t\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RA}$, $\overrightarrow{XB} = t\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RB}$, $\overrightarrow{XC} = t\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RC}$ a $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SC}$. Jelikož triviálně $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, dostáváme $x_1 = a_X$, $x_2 = b_X$ a $x_3 = c_X$.

Na následujícím příkladu ukážeme užití věty 1.

Příklad 1. Na (prodloužených) stranách BC a CA trojúhelníku ABC jsou dány body D a E tak, že přímka určená body D a E prochází těžištěm T trojúhelníku ABC. Barycentrické souřadnice bodů A, B, C,

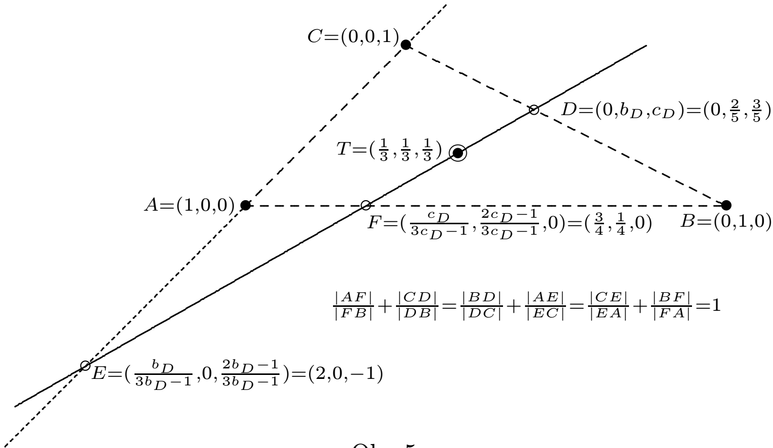
T, D, E jsou postupně $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(0,b_D,c_D)$, $(a_E,0,c_E)$, kde $c_D=1-b_D$, $c_E=1-a_E$. Podle věty 1 existuje t tak, že

$$a_E=\frac{1}{3}\,t,\quad 0=(1-t)\,b_D+\frac{1}{3}\,t\quad\text{a}\quad c_E=(1-t)\,c_D+\frac{1}{3}\,t.$$

Tedy $t=\frac{3b_D}{3b_D-1}$, a proto $a_E=\frac{b_D}{3b_D-1}$ a $c_E=\frac{2b_D-1}{3b_D-1}$. Odtud dostáváme

$$\frac{|BD|}{|DC|}+\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{1-b_D}{b_D}+\frac{2b_D-1}{b_D}=\frac{b_D}{b_D}=1.$$

Na obr. 5 je tato situace vyobrazena jak pro bod E na prodloužené straně CA, tak pro bod F na straně AB (při speciální volbě bodu D). Přesvědčte se o rovnostech uvedených na obrázku.



Obr. 5

Geometrický význam kladných barycentrických souřadnic bodů uvnitř trojúhelníku ABC je velmi názorný a vede k tomu, že jsou tyto souřadnice někdy nazývány *plošnými* či objemovými. Jejich význam je vyjádřen v následující větě; zde (UVW) označuje obsah trojúhelníku UVW.

Věta 2. *Nechť X je vnitřním bodem trojúhelníku ABC. Potom pro barycentrické souřadnice (a_X,b_X,c_X) bodu X platí*

$$a_X=\frac{(BCX)}{(ABC)},\quad b_X=\frac{(CAX)}{(ABC)},\quad c_X=\frac{(ABX)}{(ABC)}.\tag{6}$$

Důkaz. Nechť D je průsečík přímky určené body A a X a strany BC trojúhelníku ABC. Barycentrické souřadnice bodů D a X spolu úzce souvisí pomocí vztahů

$$a_D = 0, \quad b_D = \frac{b_X}{1 - a_X}, \quad c_D = \frac{c_X}{1 - a_X}.$$

To odvodíme ihned užitím věty 2. Nyní už jenom zbývá sledovat posloupnost rovností

$$\frac{b_X}{c_X} = \frac{b_D}{c_D} = \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{(DCA)}{(BDA)} = \frac{(DCX)}{(BDX)} =$$
$$= \frac{(DCA) - (DCX)}{(BDA) - (BDX)} = \frac{(CAX)}{(ABX)}.$$

Stejným způsobem odvodíme

$$\frac{c_X}{a_X} = \frac{(ABX)}{(BCX)} \quad \text{a} \quad \frac{a_X}{b_X} = \frac{(BCX)}{(CAX)}.$$

Triviálně, $(ABX) + (BCX) + (CAX) = (ABC)$, a proto platí (6).

Poznámka 2. Při našem užití symbolu $|XY|$ pro délku úsečky ohraničené body X a Y nebylo nutné zdůrazňovat, že „délka“ $|XY|$ je „orientovaná“. Zvolíme-li orientaci přímky, na níž leží bod W mezi body U a V, tak, že $|UW| > 0$, bude též $|UV| > 0$, $|WU| > 0$, avšak $|WU| = -|UW| < 0$, atd. Tedy poměr $\frac{|UW|}{|WV|}$, vyskytující se při studiu těžiště, je v tomto případě kladný, zatímco v případě, že bod V leží mezi body U a W, je poměr $\frac{|UW|}{|WV|}$ záporný. Součin takovýchto tří poměrů se vyskytuje jak ve větě Cèvově, tak ve větě Menelaově; jak uvidíme v [3], v případě věty Cèvovy jsou buď všechny tři poměry kladné, anebo jsou dva záporné, v případě věty Menelaovy je záporný buď jeden z poměrů, nebo jsou záporné všechny tři.

Literatura

[1] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry.* Druhé vydání, John Wiley & Sons, New York–London–Sydney–Toronto, 1969.

[2] Dlab, V.: I. Barycentrické souřadnice na přímce. *Rozhledy MF*, roč. 91 (2016), č. 1, s. 1–7.

[3] Dlab, V.: III. Aplikace: Věta Cèvova, věta Menelaova a věta Routhova. *Rozhledy MF* (v tisku).