Vlastimil Dlab

I. Barycentrické souřadnice na přímce

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 1, 1–7

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146646`

I. Barycentrické souřadnice na přímce

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. This is the first part of a series of three articles introducing the concept of barycentric coordinates. It deals with the coordinates on a straight line.

Úvod

Zavedení algebraických metod do geometrie, které se všeobecně připisuje *René Descartovi* (1596–1650), znamenalo v historii matematiky velmi významný, téměř revoluční krok v popisu geometrických objektů a řešení geometrických úloh.

Následující série tří článků má za cíl seznámit čtenáře s barycentrickými souřadnicemi, v tomto úvodním článku se souřadnicemi na přímce. Druhý článek se bude věnovat barycentrickým souřadnicím v rovině a prostoru. Obsahem třetího článku pak bude řada aplikací, ukážeme užitečnost barycentrických souřadnic především na důkazu věty Menelaovy, Cèvovy a Routhovy (*Menelaus z Alexandrie* (asi 70 – asi 130), *Giovanni Benedetto Cèva* (1647–1734), *Edward John Routh* (1831–1907)).

Systém barycentrických souřadnic zavedl v monografii [3] v roce 1827 *August Ferdinand Möbius* (1790–1868). Poučnou kapitolu týkající se barycentrických souřadnic najdeme v Úvodu do Geometrie *Harolda Scotta MacDonalda Coxetera* (1907–2003) [1]. Dodejme ještě, že barycentrické souřadnice našly v současnosti uplatnění v počítačové grafice (viz např. [2] a [4]).

Barycentrické souřadnice na přímce

Začněme definicí *těžiště* (*barycentra*) dvou „ohodnocených bodů“ (A, h_A) a (B, h_B), tj. dvou různých bodů A a B ohodnocených čísly h_A a h_B splňujících podmínku $h_A + h_B \neq 0$. Připomeňme, že v případě $h_A > 0$ a $h_B > 0$ interpretujeme ve fyzice tato čísla h_A a h_B jako hmotnosti koncentrované v bodech A a B. K této reprezentaci se ještě vrátíme níže.

Pro dané ohodnocené body (A, h_A) a (B, h_B) existuje jednoznačně bod T splňující vektorovou rovnost

$$h_A \overrightarrow{TA} + h_B \overrightarrow{TB} = \vec{0}, \tag{1}$$

a ta je v důsledku $\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AB}$ ekvivalentní s rovností

$$(h_A + h_B) \overrightarrow{TA} + h_B \overrightarrow{AB} = \vec{0},$$

a odtud

$$\overrightarrow{AT} = \frac{h_B}{h_A + h_B} \overrightarrow{AB}. \tag{2}$$

Leží tedy (jednoznačně určený) bod T, který nazveme *těžištěm ohodnocených bodů* (A, h_A) a (B, h_B), na přímce určené body A a B. Budeme psát

$$T = \{(A, h_A), (B, h_B)\}.$$

Body A a B jsou body ležící v prostoru $\mathcal{P}$, a proto lze očekávat, že společně s jejich těžištěm (vzhledem k danému ohodnocení h_A a h_B) budou mít vztah nejen k bodům na přímce AB, ale ke všem bodům v prostoru $\mathcal{P}$. Tento vztah je vyjádřen následujícím tvrzením.

Je-li X libovolný bod prostoru $\mathcal{P}$ a T těžiště ohodnocených bodů (A, h_A) a (B, h_B), potom

$$h_A \overrightarrow{XA} + h_B \overrightarrow{XB} = (h_A + h_B) \overrightarrow{XT}. \tag{3}$$

To je velmi závažný vztah, který plyne bezprostředně z následujícího tvaru rovnosti (1),

$$h_A (\overrightarrow{TX} + \overrightarrow{XA}) + h_B (\overrightarrow{TX} + \overrightarrow{XB}) = \vec{0}.$$

Ihned též vidíme, že pro libovolné $k \neq 0$ je

$$\{(A, h_A), (B, h_B)\} = \{(A, kh_A), (B, kh_B)\}$$

a že $\{(A, 1), (B, 0)\} = A$ a $\{(A, 0), (B, 1)\} = B$.

Je-li $h_A \neq 0$, rovnost (2) lze přepsat do tvaru

$$\overrightarrow{AT} = \frac{q}{1+q} \overrightarrow{AB}, \quad \text{kde } q = \frac{h_B}{h_A} \neq -1.$$

Odtud plyne, že každý bod přímky AB může být těžištěm bodů (A, h_A) a (B, h_B) pro vhodné hodnoty h_A a h_B. Je-li totiž r libovolné reálné číslo, $r \neq 1$, potom

$$q = \frac{r}{1-r} \quad \text{splňuje rovnici} \quad \frac{q}{1+q} = r,$$

a tedy každý bod $X \neq B$ na přímce AB je těžištěm pro vhodná ohodnocení $h_A \neq 0$, h_B. Bod B je ovšem též těžištěm, totiž pro ohodnocení $h_A = 0$, $h_B \neq 0$.

Velmi zásadní je skutečnost, že je každý bod přímky AB (až na nenulový násobek) těžištěm *jednoznačně určeného ohodnocení* h_A, h_B. Požadujeme-li tedy, aby ohodnocení splňovalo (normalizační) podmínku

$$h_A + h_B = 1,$$

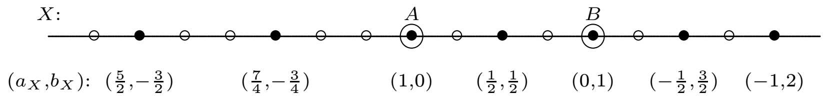
je každý bod X přímky AB jednoznačně popsán dvojicí reálných čísel a_X, b_X takových, že $a_X + b_X = 1$. Bod X je totiž těžištěm

$$X = \{(A, a_X), (B, b_X)\}. \tag{4}$$

Definice. Tuto jednoznačně určenou dvojici (a_X, b_X), $a_X + b_X = 1$, která splňuje vztah (4), nazveme *barycentrickými souřadnicemi bodu* $X = \{(A, a_X), (B, b_X)\}$. Jsou to barycentrické souřadnice bodu X vzhledem k dvěma (různým) bodům A a B.

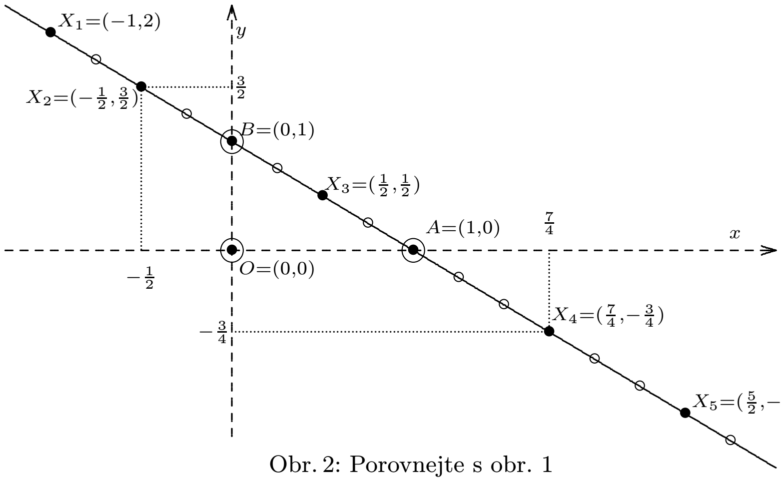
Poznámka. Znovu zdůrazněme, že naše definice vyžaduje, aby barycentrické souřadnice (a_X, b_X) splňovaly podmínku $a_X + b_X = 1$. Takové souřadnice jsou někdy v literatuře nazývány *normalizované barycentrické souřadnice* nebo *izobarycentrické souřadnice*, na rozdíl od barycentrických souřadnic, které jsou chápány jako množina všech násobků dvojice (a_X, b_X), tj. jako množina všech $(a, b) = (ka_X, kb_X)$, kde k je libovolné nenulové reálné číslo. Takto chápané souřadnice jsou homogenní a prostě $a_X = \frac{a}{a+b}$ a $b_X = \frac{b}{a+b}$.

Poznamenejme, že barycentrické souřadnice bodů X polopřímky určené bodem A (tj. „vlevo“ od A) splňují nerovnost $a_X > -b_X > 0$, $a_A = 1$, barycentrické souřadnice bodů ležících mezi A a B jsou kladné, $b_B = 1$ a barycentrické souřadnice bodů X polopřímky určené bodem B (tj. „vpravo“ od B) splňují nerovnost $b_X > -a_X > 0$, viz obr. 1.



Obr. 1

Zde se samozřejmě nabízí ukázat na souvislost s grafem přímky $x + y = 1$ v rovině s kartézskými souřadnicemi x a y. Obr. 2 identifikuje barycentrické souřadnice bodů na této přímce s jejich kartézskými souřadnicemi.



Obr. 2: Porovnejte s obr. 1

Všimněme si, že v případě $a_X > 0$, $b_X > 0$ bod X rozděluje úsečku AB v poměru vyjádřeném právě jeho barycentrickými souřadnicemi. Uvidíme, že v rovině budou barycentrické souřadnice v takovém případě vyjadřovat poměr obsahů jistých trojúhelníků, v prostoru poměr objemů jistých čtyřstěnů atd.

Nyní ještě vyjasněme souvislost mezi kartézskými a barycentrickými souřadnicemi. Body A a B leží v prostoru a ten je obecně n-rozměrný pro libovolné $n \geq 1$. My se omezíme na případ $n \leq 3$ (už jen proto, že pro libovolné n je zobecnění pouze formální záležitostí), prostorem $\mathcal{P}$ budeme rozumět trojrozměrný prostor.

Nechť je tedy $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ systém prostorových (ne nutně pravoúhlých) souřadnic a každý bod $X \in \mathcal{P}$ je v něm popsán svými souřadnicemi $X = (x_1, x_2, x_3)$. Tedy platí

$$\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}.$$

Jestliže $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $B = (b_1, b_2, b_3)$, potom

$$T = T\{(A, h_A), (B, h_B)\} = \left(\frac{h_A a_1 + h_B b_1}{h_A + h_B}, \frac{h_A a_2 + h_B b_2}{h_A + h_B}, \frac{h_A a_3 + h_B b_3}{h_A + h_B}\right).$$

To plyne bezprostředně z rovnosti (3), položíme-li $X = O$. Pro barycentrické souřadnice (a_T, b_T) těžiště T tedy dostáváme jeho prostorové souřadnice ve tvaru $T = (a_T a_1 + b_T b_1, a_T a_2 + b_T b_2, a_T a_3 + b_T b_3)$.

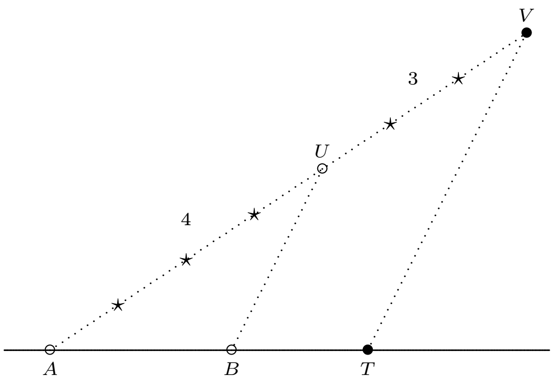
Pro těžiště T v *rovině* se systémem souřadnic $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ platí obdobně $T = (a_T a_1 + b_T b_1, a_T a_2 + b_T b_2)$.

Příklad 1. Nechť $(A, 3)$ a $(B, -7)$ jsou dva ohodnocené body, jejichž rovinné kartézské souřadnice jsou $A = (-2, 1)$ a $B = (2, 3)$. Určete jejich těžiště a sestrojte ho.

Řešení: Barycentrické souřadnice těžiště jsou $(a_T, b_T) = (-\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$, kartézské souřadnice $T = (\frac{-3\cdot 2-7\cdot 2}{-4}, \frac{3\cdot 1-7\cdot 3}{-4}) = (5, \frac{9}{2})$ a podle (2),

$$\overrightarrow{AT} = \frac{-7}{3-7}\,\overrightarrow{AB} = \frac{7}{4}\,\overrightarrow{AB}.$$

Konstrukce těžiště T užitím podobnosti je provedena na obr. 3. Zde $|\overrightarrow{AU}| : |\overrightarrow{AV}| = 4 : 7$.



Obr. 3

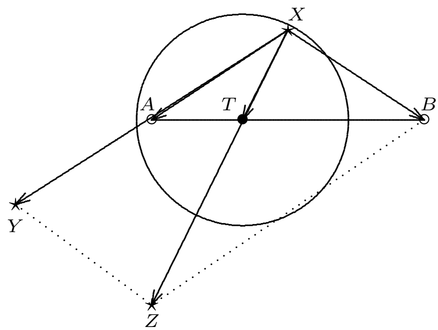
Příklad 2. V rovině jsou dány dva body A a B. Určete geometrické místo bodů X této roviny, pro něž platí

$$|2\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}| = |\overrightarrow{AB}|. \tag{5}$$

Řešení: Toto je příklad, který ilustruje poznámku uvedenou před rovností (3). Jedná se zde o *všechny body* X *roviny*, v níž leží přímka AB, které splňují rovnost (5). Uvažujme ohodnocené body $(A, 2)$ a $(B, 1)$ a určeme jejich těžiště T. Poté užijme rovnost (3), čímž dostáváme (obr. 4) rovnosti

$$2\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XY}, \quad 2\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XZ}, \quad \overrightarrow{XT} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{XZ}.$$

Odtud $|\overrightarrow{XT}| = \frac{1}{3}\,|\overrightarrow{AB}|$, a tedy geometrickým místem bodů X je kružnice o středu T a poloměru $\frac{1}{3}\,|\overrightarrow{AB}|$.



Obr. 4

Příklad 2 můžeme samozřejmě formulovat pro prostor $\mathcal{P}$, tj. uvažovat všechny body X prostoru $\mathcal{P}$ splňující podmínku (5).

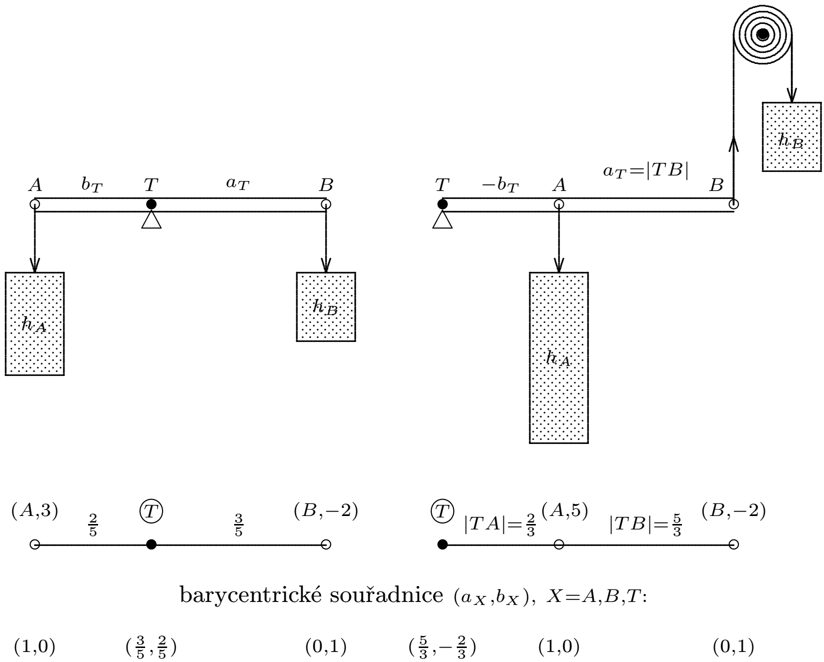
Umíte odůvodnit, že geometrickým místem takových bodů je kulová plocha o středu T a poloměru $\frac{1}{3}\,|\overrightarrow{AB}|$?

Příklad 3. Nechť T je barycentrem ohodnocených bodů (A, a) a (B, b). Definujme bod V podmínkou $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{AB}$. Určete barycentrické souřadnice bodu V vzhledem k bodům A a B.

Řešení usnadní obr. 1. Barycentrické souřadnice bodu T jsou $(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b})$ a souřadnice bodu V jsou $(\frac{a}{a+b} - 1, \frac{b}{a+b} + 1) = (\frac{-b}{a+b}, \frac{a+2b}{a+b})$. Zkontrolujte výsledek pro speciální hodnoty a a b.

Nalezněte barycentrické souřadnice bodu W, který je definován pomocí $\overrightarrow{VW} = 3\,\overrightarrow{VB}$.

Nakonec se ještě vraťme k slíbené fyzikální interpretaci barycentrických souřadnic, totiž k rovnosti momentu sil. Obr. 5 ilustruje situaci, kdy $h_A > 0$, $h_B > 0$ (vlevo) a kdy $h_A > 0$, $h_B < 0$ (vpravo).



Obr. 5

Literatura

[1] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry.* Druhé vydání, John Wiley & Sons, New York–London–Sydney–Toronto, 1969.

[2] Dunn, F., Parberry, I.: *3D Math Primer for Graphics and Game Development.* Wordware Publishing, Inc., Plano, Texas, 2002.

[3] Möbius, A. F.: *Der baryzentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie.* Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1827.

[4] Salomon, D.: *Computer Graphics and Geometric Modeling.* Springer-Verlag, New York, 1999.