Vlastimil Dlab

Aproximace geometrických posloupností

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 4, 1–5

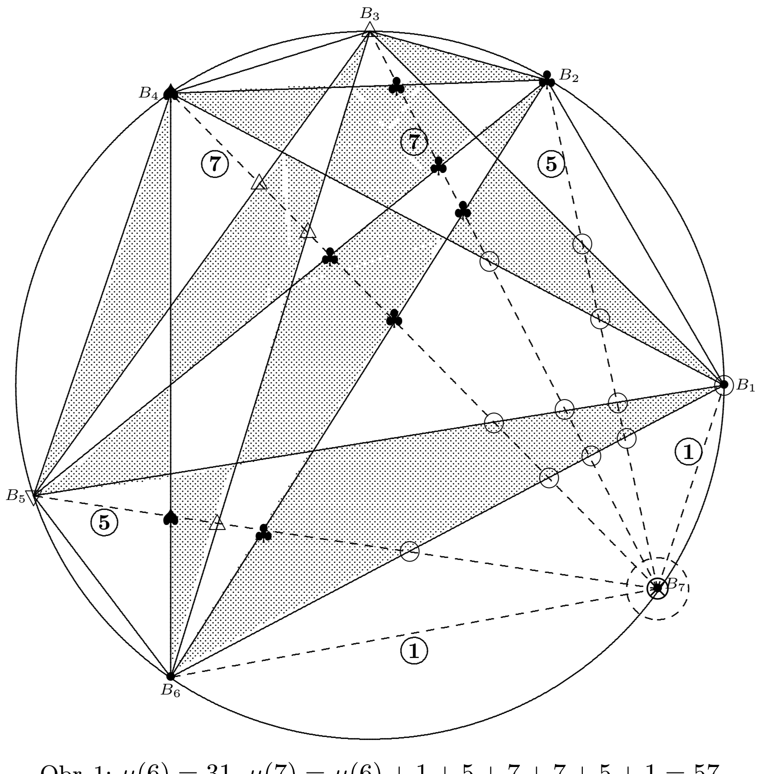
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146634`

Aproximace geometrických posloupností

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. The article deals with the problem of determining the maximal number of regions of a given circle that can be obtained by connecting n points of that circle by straight lines. The respective sequence suggests the way of approximating geometric progressions by arithmetic progressions of higher orders.

Začněme zdánlivě jednoduchou úlohou týkající se n obecně položených bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (v tomto pořadí) na dané kružnici. Tyto body propojme navzájem tětivami B_iB_j, $1 \leq i < j \leq n$ (obr. 1).



Obr. 1: $\mu(6) = 31$, $\mu(7) = \mu(6) + 1 + 5 + 7 + 7 + 5 + 1 = 57$

Takových tětiv vedených z bodu B_i do bodů B_j, $j > i$, je tedy

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+(i-1)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}.$$

Stejně snadné je nalézt počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v bodech $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Vidíme, že jich je $\binom{n}{3}$. Podobně snadno určíme počet všech průsečíků těchto tětiv. Každý takový průsečík je určen dvěma různými tětivami, tedy čtveřicí bodů, a těchto čtveřic je $\binom{n}{4}$.

Úloha nalézt maximální počet oblastí, které jsou v kružnici určeny těmito tětivami, už tak snadná není. Označme tento počet $\mu(n)$. Je zřejmé, že pro $n = 1$ je takovou oblastí celý vnitřek kružnice, tj. $\mu(1) = 1$. Stejně snadno vidíme, že $\mu(2) = 2$, $\mu(3) = 4$, $\mu(4) = 8$, $\mu(5) = 16$. Obr. 1 ukazuje (patrně k našemu překvapení), že $\mu(6)$ není očekávaných 32, ale 31, a že $\mu(7) = 57$.

K výpočtu $\mu(n)$ použijeme posloupnost rozdílů

$$\Delta_1(n) = \mu(n+1) - \mu(n) \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tedy $\Delta_1(1) = 1$, $\Delta_1(2) = 2$, $\Delta_1(3) = 4$, $\Delta_1(4) = 8$, $\Delta_1(5) = 15$, … a

$$\mu(n) = \mu(1) + \sum_{t=1}^{n-1} \Delta_1(t).$$

Obecně můžeme vyčíslit hodnotu $\Delta_1(n-1)$ následujícím zcela názorným způsobem. Uvažujme $\mu(n-1)$ oblastí určených tětivami mezi body $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$. Každá tětiva vedená z bodu B_n rozdělí existující oblast, kterou prochází, na dvě oblasti. Počet takto nově vytvořených oblastí je tedy určen počtem průsečíků této tětivy s tětivami určenými body $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$. Označíme-li pro každou tětivu B_nB_t, $t = 1, 2, \ldots, n-1$, počet průsečíků $\pi(t)$, zvětší se počet oblastí o $\pi(t)+1$. Tětiva z bodu B_n do bodu B_1 zvětší počet oblastí o jednu, tětiva B_nB_2 o $n-2 = 1+(n-3)$, neboť protíná $n-3$ tětiv z bodu B_1 do bodů $B_3, B_4, \ldots, B_{n-1}$ (pro $n = 7$ viz obr. 1). Podobně tětiva B_nB_3 zvětší počet oblastí o $2n-7 = 1+2(n-4)$, neboť protíná $n-4$ tětiv z bodu B_1 a $n-4$ tětiv z bodu B_2. Pro libovolné $1 \le t \le n-1$, tětiva B_nB_t zvětší počet oblastí o $(t-1)n - t^2 + 2 = 1 + (t-1)(n-t-1)$; tento počet je určen $n-t-1$ průsečíky s každou z tětiv z bodů $B_1, B_2, \ldots, B_{t-1}$.

Celkem tedy pro $\Delta_1(n-1)$ dostáváme výraz

$$\Delta_1(n-1) = \sum_{t=1}^{n-1} [(t-1)n - t^2 + 2] =$$
$$= \frac{1}{2}\, n(n-1)(n-2) - \frac{1}{6}\,(n-1)n(2n-1) + 2(n-1) =$$
$$= \frac{1}{6}(n-1)(n^2-5n+12).$$

Celý proces je pro $1 \leq n < 20$ ilustrován na obr. 2 na str. 5, který vyznačuje speciálně případ $n = 7$ (s odkazem na obr. 1). Odtud

$$\mu(n) = \mu(1) + \Delta_1(1) + \Delta_1(2) + \cdots + \Delta_1(n-1) =$$
$$= 1 + \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{6}\,(t-1)(t^2-5t+12) = 1 + \frac{1}{6}\,\sum_{t=1}^{n} t^3 - \sum_{t=1}^{n} t^2 + \frac{17}{6}\,\sum_{t=1}^{n} t - 2n =$$
$$= \frac{1}{24}\,(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24). \tag{1}$$

Podotkněme, že jsme zde užili známých součtů

$$\sum_{t=1}^{n} t^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2 \quad \text{a} \quad \sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1),$$

které lze snadno odvodit. Vzorec (1) lze pro $\mu(n)$ přepsat do tvaru

$$\mu(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}, \tag{2}$$

kde $\binom{n}{t} = 0$ pro $n < t$. O rovnosti (1) a (2) se můžeme přesvědčit výpočtem. Definujeme-li

$$\Delta_2(n) = \Delta_1(n+1) - \Delta_1(n), \qquad \Delta_3(n) = \Delta_2(n+1) - \Delta_2(n),$$
$$\Delta_4(n) = \Delta_3(n+1) - \Delta_3(n), \qquad \Delta_5(n) = \Delta_4(n+1) - \Delta_4(n),$$

zjistíme, že $\Delta_2(1) = \Delta_3(1) = \Delta_4(1) = 1$ a $\Delta_5(n) = 0$ pro každé $n = 1, 2, \ldots$

Pro lepší porozumění dané problematice je dobré seznámit se s teorií aritmetických posloupností vyšších řádů (viz např. [1], [2], [3], [4]).

Posloupnost $(\Delta_4(n))$ je nenulová stacionární posloupnost (aritmetická posloupnost řádu nula), posloupnost $(\Delta_3(n))$ je aritmetická posloupnost známá ze školní výuky (aritmetická posloupnost prvního řádu), $(\Delta_2(n))$ je aritmetická posloupnost druhého řádu, $(\Delta_1(n))$ je aritmetická posloupnost třetího řádu a naše posloupnost $(\mu(n))$ je aritmetická posloupnost čtvrtého řádu. Její n-tý člen lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\mu(n) = \mu(1)\binom{n-1}{0} + \Delta_1(1)\binom{n-1}{1} + \Delta_2(1)\binom{n-1}{2} &+\\ + \Delta_3(1)\binom{n-1}{3} + \Delta_4(1)\binom{n-1}{4} &=\\ = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4} &=\\ = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.&\end{aligned}$$

A nyní se dostáváme k titulu našeho článku. V našem příkladu jsme „aproximovali“ konečnou geometrickou posloupnost $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$ aritmetickou posloupností $(\mu(n))$ čtvrtého řádu.

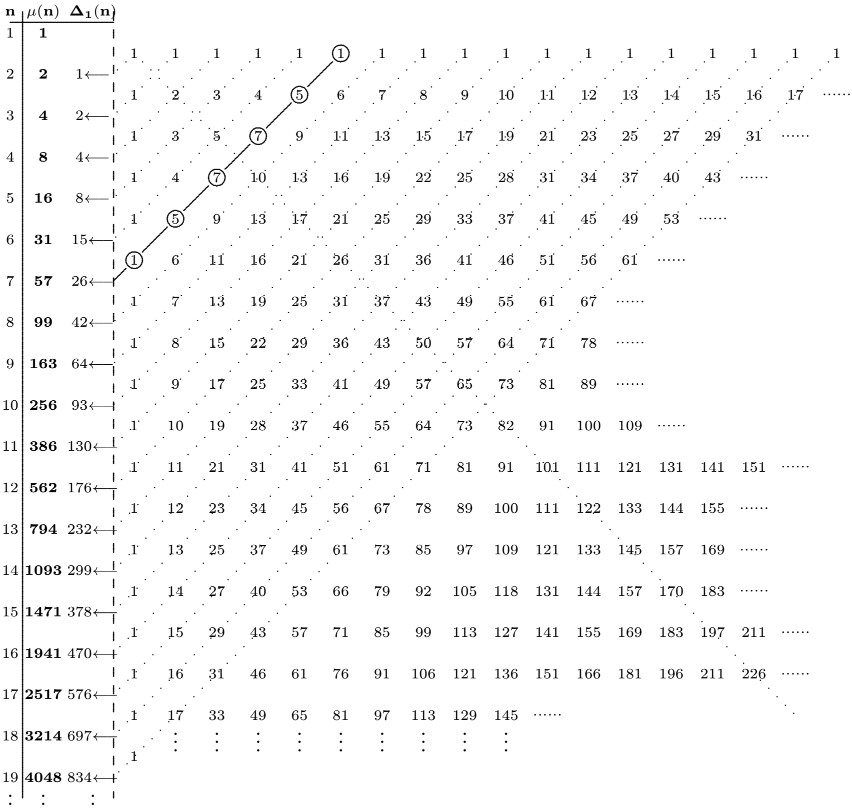
Stejným způsobem můžeme aproximovat libovolnou konečnou geometrickou posloupnost $a_1 = 1$, $a_2 = q$, $a_3 = q^2$, $a_4 = q^3$, $\ldots$, $a_n = q^{n-1}$, $q \neq 1$, aritmetickou posloupností $(n-1)$-ho řádu $(\alpha(s))$. Označíme-li opět $\Delta_1(n) = q^n - q^{n-1}$ a $\Delta_{s+1}(n) = \Delta_s(n+1) - \Delta_s(n)$ pro $1 \leq s \leq n$, vidíme, že $\Delta_s(1) = (q-1)^s$ pro $2 \leq s \leq n-1$ a $\Delta_n(t) = 0$ pro všechna $t = 1, 2, \ldots$ Obecný člen $\alpha(s)$ tudíž splňuje (viz [1]) rovnost

$$\alpha(s) = \binom{s-1}{0} + \binom{s-1}{1}(q-1) + \binom{s-1}{2}(q-1)^2 + \cdots + \binom{s-1}{n-1}(q-1)^{s-1},$$

a tedy $\alpha(s) = a_s$ pro všechna $1 \leq s \leq n$. Poznamenejme, že

$$\alpha(n+1) = \sum_{t=0}^{n-1}\binom{n}{t}(q-1)^t = \sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}(q-1)^t - (q-1)^n = q^n - (q-1)^n.$$

Naše úvodní úloha se týkala případu, kdy $q = 2$ a $n = 5$. Věříme, že tato úloha bude zdrojem dalších inspirací. Všimeme si např., že řádky i sloupce tabulky na obr. 2 jsou aritmetické posloupnosti. Umíte vysvětlit, proč je oblastí o jednu více, než všech tětiv a jejich průsečíků?



Obr. 2: Maximální počet oblastí $\mu(n)$

Literatura

[1] Dlab, V.: Arithmetic progressions of higher order. *Teaching Math. and Comp. Sci.* **9**, 2 (2011), s. 225–239. (V českém překladu dostupné na `www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/literatura.htm`.)

[2] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k algebře.* Matfyzpress, Praha, 2013 (připravuje se k vydání).

[3] Zhouf, J.: Aritmetická posloupnost druhého řádu. *Rozhledy matematicko-fyzikální* **80**, 3 (2005), s. 3–11.

[4] Zhouf, J., Stehlíková, N.: Rozšíření pojmu aritmetická posloupnost na střední škole. In: *Dva dny s didaktikou matematiky.* Pedagogická fakulta UK, Praha, 2005, s. 112–118.