

Rozhledy matematicko-fyzikální

Úlohy domácího kola 65. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 3, 14–21

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146628>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2015

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SOUTĚŽE

Úlohy domácího kola 65. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

KATEGORIE Z5

Z5-I-1

Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 cestovala vlakem. Vlak měl tři vagóny a v každém se vezla právě tři čísla. Číslo 1 se vezlo v prvním vagónu a v posledním vagónu byla všechna čísla lichá. Průvodčí cestou spočítal součet čísel v prvním, druhém i posledním vagónu a pokaždé mu vyšel stejný součet. Určete, jak mohla být čísla do vagónů rozdělena.

(V. Hucíková)

Z5-I-2

Marta nesla své nemocné kamarádce Marušce 7 jablek, 6 hrušek a 3 pomeranče. Cestou ale dva kusy ovoce snědla. Určete, která z následujících situací mohla nastat a jaké dva kusy ovoce by Marta v takovém případě musela sníst:

- Maruška nedostala žádný pomeranč.
- Maruška dostala méně hrušek než pomerančů.
- Maruška dostala stejný počet jablek, hrušek i pomerančů.
- Maruška dostala stejný počet kusů ovoce dvojího druhu.
- Maruška dostala více jablek než zbývajících kusů ovoce dohromady.

(L. Hozová)

Z5-I-3

Maminka vyprala čtvercové utěrky a větší je vedle sebe na prádelní šňůru nataženou mezi dvěma stromy. Použila šňůru o délce 7,5 metru, přičemž na uvázání kolem kmenů potřebovala na každé straně 8 dm. Všechny utěrky mají šířku 45 cm. Mezi krajní utěrkou a kmenem maminka nechává mezeru alespoň 10 cm, utěrky se jí nepřekrývají a nemá je složené ani skrčené.

Kolik nejvíce utěrek může takto pověsit na nataženou šňůru?

(L. Dedková)

Z5-I-4

Když pan Beran zakládal chov, měl bílých ovcí o 8 více než černých. V současnosti má bílých ovcí čtyřikrát více než na začátku a černých třikrát více než na začátku. Bílých ovcí je teď o 42 více než černých. Kolik nyní pan Beran chová bílých a černých ovcí dohromady?

(*L. Šimůnek*)

Z5-I-5

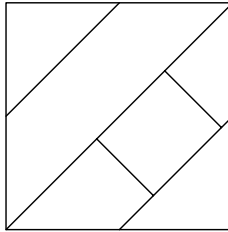
Čtvercová síť se skládá ze čtverců se stranou délky 1 cm. Narýsujte do ní alespoň tři různé obrazce takové, aby každý měl obsah 6 cm^2 a obvod 12 cm a aby jejich strany splývaly s přímkami sítě. (*E. Semerádová*)

Z5-I-6

V nepřestupném roce bylo 53 nedělí. Na jaký den týdne připadl Štědrý den? (*M. Volfová*)

KATEGORIE Z6**Z6-I-1**

Archeologové zjistili, že vlajka bájného matematického království byla rozdělena na šest polí tak, jako na obrázku. Ve skutečnosti byla vlajka třibarevná a každé pole bylo vybarveno jednou barvou.



Vědci už vybádali, že na vlajce byla použita červená, bílá a modrá barva, že vnitřní obdélníkové pole bylo bílé a že spolu nesousedila dvě pole stejné barvy. Určete, kolik možností vzhledu vlajky musí archeologové v této fázi výzkumu zvažovat. (*V. Hucíková*)

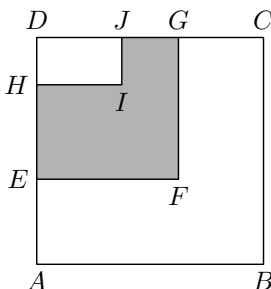
Z6-I-2

Jiřík šel do služby k čarodějovi. Ten měl v prvním sklepě víc much než pavouků, ve druhém naopak. V každém sklepě měli mouchy a pavouci dohromady 100 nohou. Určete, kolik mohlo být much a pavouků v prvním a kolik ve druhém sklepě. (*M. Krejčová*)

SOUTĚŽE

Z6-I-3

Na obrázku je čtverec $ABCD$, čtverec $EFGD$ a obdélník $HIJD$.

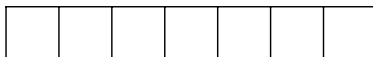


Body J a G leží na straně CD , přičemž platí $|DJ| < |DG|$, a body H a E leží na straně DA , přičemž platí $|DH| < |DE|$. Dále víme, že $|DJ| = |GC|$. Šestiúhelník $ABCGFE$ má obvod 96 cm, šestiúhelník $EFGJIH$ má obvod 60 cm a obdélník $HIJD$ má obvod 28 cm.

Určete obsah šestiúhelníku $EFGJIH$. (L. Šimůnek)

Z6-I-4

Na obrázku je obdélník rozdělený na 7 políček. Na každé políčko se má napsat právě jedno z čísel 1, 2 a 3.



Mirek tvrdí, že to lze provést tak, aby součet dvou vedle sebe napsaných čísel byl pokaždé jiný. Zuzka naopak tvrdí, že to není možné. Rozhodněte, kdo z nich má pravdu. (V. Hucíková)

Z6-I-5

Pan Cuketa měl obdélníkovou zahradu, jejíž obvod byl 28 metrů. Obsah celé zahrady vyplnily právě čtyři čtvercové záhony, jejichž rozměry v metrech byly vyjádřeny celými čísly. Určete, jaké rozměry mohla mít zahrada. Najděte všechny možnosti. (L. Hozová)

Z6-I-6

V zámecké kuchyni připravují nudlovou polévku v hrncích a kotlích. V pondělí uvařili 25 hrnců a 10 kotlů polévky. V úterý uvařili 15 hrnců a 13 kotlů. Ve středu uvařili 20 hrnců a ve čtvrtek 30 kotlů. Přitom v pondělí a v úterý uvařili stejné množství polévky.

Kolikrát víc polévky uvařili ve čtvrtek než ve středu? (K. Pazourek)

KATEGORIE Z7

Z7-I-1

Myška Hryzka našla 27 stejných krychliček sýra. Nejdříve si z nich poskládala velkou krychli a chvíli počkala, než se sýrové krychličky k sobě přilepily. Potom z každé stěny velké krychle vyhryzla střední krychličku. Poté snědla i krychličku, která byla ve středu velké krychle. Zbytek sýra chce Hryzka spravedlivě rozdělit svým čtyřem mláďatům, a proto ho chce rozřezat na čtyři kusy stejného tvaru i velikosti. Řezat bude jen podél stěn krychliček a nic k sobě už lepit nebude.

Jaký tvar mohou mít kusy sýra pro mláďata? Najděte alespoň dvě možnosti. (V. Hucíková)

Z7-I-2

Vlčkovi mají 4 děti. Ondra je o 3 roky starší než Matěj a Kuba o 5 let starší než nejmladší Jana. Víme, že je jim dohromady 30 let a před 3 lety jim bylo dohromady 19 let. Určete, jak jsou děti staré. (M. Volfová)

Z7-I-3

Uvnitř pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ je bod P takový, že trojúhelník ABP je rovnostranný. Jak velký je úhel BCP ? (L. Hozová)

Z7-I-4

V roboti škole do jedné třídy chodí dvacet robotů Robertů, kteří jsou očíslováni Robert 1 až Robert 20. Ve třídě je zrovna napjatá atmosféra, mluví spolu jen někteří roboti. Roboti s lichým číslem nemluví s roboty se sudým číslem. Mezi Roberty s lichým číslem spolu mluví pouze roboti, kteří mají číslo se stejným počtem číslic. Roboti se sudým číslem se baví pouze s těmi, jejichž číslo začíná stejnou číslicí.

Kolik dvojic robotů Robertů se může spolu vzájemně bavit? (K. Pazourek)

Z7-I-5

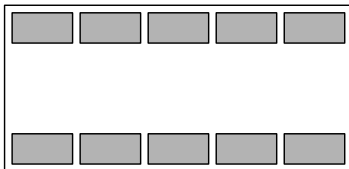
V kocourkovské škole používají zvláštní číselnou osu. Vzdálenost mezi čísly 1 a 2 je 1 cm, vzdálenost mezi čísly 2 a 3 je 3 cm, mezi čísly 3 a 4 je 5 cm a tak dále: vzdálenost mezi každou následující dvojicí přirozených čísel se vždy zvětší o 2 cm.

Mezi kterými dvěma přirozenými čísly je na kocourkovské číselné ose vzdálenost 39 cm? Najděte všechny možnosti. (K. Pazourek)

SOUTĚŽE

Z7-I-6

Na výstavě dlouhosrstých koček se sešlo celkem deset vystavujících. Vystavovalo se v obdélníkové místnosti, ve které byly dvě řady stolů jako na obrázku.



Kočky byly označeny navzájem různými čísly v rozmezí 1 až 10 a na každém stole seděla jedna kočka. Určete, která kočka byla na výstavě hodnocena nejlépe, pokud víte, že:

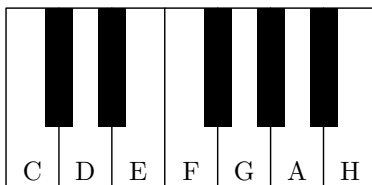
- součet čísel koček sedících naproti sobě byl vždy stejný,
- součet čísel každých dvou koček sedících vedle sebe byl sudý,
- součin čísel každých dvou koček sedících vedle sebe v dolní řadě je násobek čísla 8,
- kočka číslo 1 není na kraji a je víc vpravo než kočka číslo 6,
- vyhrála kočka sedící v pravém dolním rohu.

(*M. Mach*)

KATEGORIE Z8

Z8-I-1

Míša měl na poličce malé klávesy, které vidíte na obrázku. Na bílých klávesách byly vyznačeny jejich tóny.



Klávesy našla malá Klára. Když je brala z poličky, vypadly jí z ruky a všechny bílé klávesy se z nich vysypaly. Aby se bratr nezlobil, začala je Klára skládat zpět. Všimla si přitom, že se daly vložit jen na některá místa, neboť jim překážely černé klávesy umístěné přesně doprostřed mezi dvě bílé.

Kláře se podařilo klávesy nějak složit, avšak tóny na nich byly pomíchané, protože ještě neznala hudební stupnici. Zjistěte, kolika způsoby mohla Klára klávesy poskládat. (E. Novotná)

Z8-I-2

Na louce se pasou koně, krávy a ovce, dohromady jich je méně než 200. Kdyby bylo krav 45krát víc, koní 60krát víc a ovcí 35krát víc, než kolik jich je nyní, jejich počty by se rovnaly. Kolik se na louce pase koní, krav a ovcí dohromady? (M. Krejčová)

Z8-I-3

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, v němž platí

$$|AB| = 2|BC| = 2|CD| = 2|DA|.$$

Na jeho straně BC je bod K takový, že $|BK| = 2|KC|$, na jeho straně CD je bod L takový, že $|CL| = 2|LD|$, a na jeho straně DA je bod M takový, že $|DM| = 2|MA|$.

Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku KLM . (J. Zhouf)

Z8-I-4

V komoře, kde se rozbilo světlo a vše z ní musíme brát poslepu, máme ponožky čtyř různých barev. Chceme-li si být jisti, že vytáhneme alespoň dvě bílé ponožky, musíme jich z komory přinést 28. Abychom měli takovou jistotu pro šedé ponožky, musíme jich přinést také 28, pro černé ponožky stačí 26 a pro modré ponožky 34.

Kolik je celkem v komoře ponožek? (E. Semerádová)

Z8-I-5

Číslo dne je pořadové číslo daného dne v příslušném měsíci (tedy např. číslo dne 5. srpna 2016 je 5). Ciferný součet dne je součet hodnot všech číslic v datu tohoto dne (tedy např. ciferný součet dne 5. srpna 2016 je $5 + 8 + 2 + 0 + 1 + 6 = 22$). Šťastný den je takový den, jehož číslo dne je rovno cifernému součtu dne. Určete, kolik šťastných dní je v roce 2016 a které dny to jsou. (L. Růžičková)

Z8-I-6

Katka narýsovala trojúhelník ABC . Střed strany AB si označila jako X a střed strany AC jako Y . Na straně BC chce najít takový bod Z , aby obsah čtyřúhelníku $AXZY$ byl co největší. Jakou část trojúhelníku ABC může maximálně zabírat čtyřúhelník $AXZY$? (A. Bohiniková)

KATEGORIE Z9

Z9-I-1

Objem vody v městském bazénu s obdélníkovým dnem je 6 998,4 hektolitřů. Propagační leták uvádí, že kdybychom chtěli všechnu vodu z bazénu přelit do pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou rovnající se průměrné hloubce bazénu, musel by být hranol vysoký jako blízký televizní vysílač a pak by byl naplněný až po okraj.

Dodáváme, že kdybychom chtěli uplavat vzdálenost stejnou, jako je výška vysílače, museli bychom přeplavat buď osm délek, nebo patnáct šířek bazénu. Jak vysoký je vysílač? *(L. Šimůnek)*

Z9-I-2

Úžasným číslem nazveme takové sudé číslo, jehož rozklad na součin prvočísel má právě tři ne nutně různé činitele a součet všech jeho dělitelů je roven dvojnásobku tohoto čísla. Najděte všechna úžasná čísla.

(M. Mach)

Z9-I-3

Jirka sestrojil čtverec $ABCD$ o straně 12 cm. Do tohoto čtverce narýsoval čtvrtkružnici k , která měla střed v bodě B a procházela bodem A , a půlkružnici l , která měla střed v polovině strany BC a procházela bodem B .

Rád by ještě sestrojil kružnici, která by ležela uvnitř čtverce a dotýkala se čtvrtkružnice k , půlkružnice l i strany AB . Určete poloměr takové kružnice. *(M. Volfová)*

Z9-I-4

V tabulce je kurzovní lístek směnárny, avšak některé hodnoty jsou v něm nahrazeny otazníky. Směnárna vyměňuje peníze v uvedených kurzech a neúčtuje si jiné poplatky.

	nákup	prodej
1 EUR	26,20 CZK	28,00 CZK
1 GBP	? CZK	? CZK

1. Kolik eur dostane zákazník, pokud zde smění 4 200 Kč?

Když směnárník vykoupí od zákazníka 1 000 liber a poté je všechny prodá, jeho celkový zisk je 2 200 Kč. Kdyby místo toho směnárník prodal

1 000 liber a poté by všechny utržené koruny směnil s jiným zákazníkem za libry, vydělal by na tom 68,75 liber.

2. Za kolik korun směnárník nakupuje a za kolik prodává 1 libru?

(*L. Šimůnek*)

Z9–I–5

Bětka napsala přirozené číslo s navzájem různými číslicemi. Pod něj zapsala číslice původního čísla odzadu, a tak získala nové číslo. Sečtením těchto dvou čísel dostala číslo, které mělo stejný počet číslic jako myšlené číslo a skládalo se pouze z číslic myšleného čísla (avšak nemuselo obsahovat všechny jeho číslice).

Erice se Bětčino číslo zalíbilo a chtěla si najít jiné číslo se stejnými vlastnostmi. Zjistila, že neexistuje menší takové číslo než Bětčino a větší se jí hledat nechce. Určete, jaké číslo si myslí Bětka a jaké číslo by mohla najít Erika, kdyby měla víc trpělivosti.

(*K. Jasenčáková*)

Z9–I–6

Na stranách AB a AC trojúhelníku ABC leží po řadě body E a F , na úsečce EF leží bod D . Přímký EF a BC jsou rovnoběžné a současně platí

$$|FD| : |DE| = |AE| : |EB| = 2 : 1.$$

Trojúhelník ABC má obsah 27 hektarů a úsečkami EF , AD a DB je rozdělen na čtyři části. Určete obsahy těchto čtyř částí.

(*V. Žádník*)

65. ročník Matematické olympiády, úlohy domácího kola kategorie P

Úlohy P-I-1 a P-I-2 jsou praktické, vaším úkolem v nich je vytvořit a odladit efektivní program v jazyce Pascal, C nebo C++. Řešení těchto dvou úloh odevzdávejte ve formě zdrojového kódu přes webové rozhraní přístupné na stránce <http://mo.mff.cuni.cz/submit/>, kde také naleznete další informace. Odevzdaná řešení budou automaticky vyhodnocena pomocí připravených vstupních dat a výsledky vyhodnocení se dozvíte krátce po odevzdání. Pokud váš program nezíská plný počet 10 bodů, můžete své řešení opravit a znovu odevzdat.