Edita Pelantová; Štěpán Starosta

Chvála struktur

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 1-2, 99–106

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146621

Chvála struktur

Edita Pelantová, FJFI ČVUT, Praha
Štěpán Starosta, FIT ČVUT, Praha

Abstract. Mathematical problems published in newspaper weekend supplements may offer not only entertainment but also an inspiration for studying interesting mathematical objects. The article discusses the solution of one of these problems from linear algebra perspective.

Mnoho deníků ve svých víkendových přílohách nabízí čtenářům jednoduché logické a matematické úlohy, jejichž řešení zpravidla odměňuje malou výhrou. Že matematika může sloužit i k pobavení, ví hodně lidí, a to navzdory často opakovaným vychloubačným výrokům tzv. celebrit o tom, jak jim matematika ve škole nešla.*) Matematická rekreace – termín, který po léta používá pro svojí rubriku v časopise Scientific American Ian Stewart – baví i nás Čechy. V tomto příspěvku představíme jeden typ rekreační úlohy. Na ní se pokusíme nastínit, co vede matematiky k tomu, aby definovali abstraktní objekty – matematické struktury, a pak studovali jejich vlastnosti. A abychom nezůstali pozadu za jinými časopisy, v závěru formulujeme rekreační úlohu pro čtenáře. První tři řešitele čeká odměna v podobě populární knihy o matematice.

Magický čtverec

Ve víkendové příloze deníku MF Dnes dne 2. 2. 2013 byla otištěna tato úloha: *Součet čísel ve všech řadách, sloupcích i v obou úhlopříčkách je vždy stejný. Vypočtěte a doplňte chybějící čísla na obr. 1.*

	14		
		10	17
10	9		
		13	

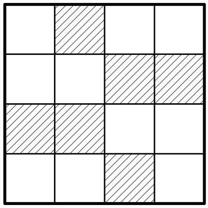
Obr. 1: Zadání úlohy

*) V překladu: „Umím se učit zpaměti, ale ne logicky myslet.“

Čtverci s takto vepsanými čísly se říká magický čtverec. Než se pustíme do hledání řešení, zamysleme se, kolik řešení bude existovat. Nenecháme se přitom zmást faktem, že v novinách je uvedeno jediné řešení.

Je řešení jednoznačné?

Na okamžik (ten bude docela dlouhý) zapomeňme, jaká čísla jsou už ve čtverci vepsaná a vnímejme pouze jejich umístění (obr. 2).



Obr. 2: Umístění čísel v zadání úlohy

První pozorování: Rozmístění políček s předepsanou hodnotou (v šedém šrafování) se nezmění, když celý čtverec otočíme kolem jeho středu o 180 stupňů.

Druhé pozorování: Do políček čtverce lze vepsat čísla 0 a 1 tak, že součty ve všech řádcích, sloupcích a na diagonálách jsou rovny 1, a přitom je na každém šrafovaném políčku vepsaná 0 (obr. 3).

0	0	0	1
1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

Obr. 3

Třetí pozorování: Z prvního pozorování usoudíme, že obr. 3 má svého symetrického kamaráda se stejnou vlastností (obr. 4).

0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1
1	0	0	0

Obr. 4

Před uvedením dalšího pozorování si zavedeme dvě operace se čtverci, které se nám budou hodit. První operace je násobení čtverce číslem t – výsledkem je čtverec, který má všechny hodnoty na všech políčkách vynásobeny číslem t. Na obr. 5 je uvedený příklad.

$$2\cdot\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3\\\hline 1&-2&3&0\\\hline 2&3&0&1\\\hline 3&0&1&-2\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&2&4&6\\\hline 2&-4&6&0\\\hline 4&6&0&2\\\hline 6&0&2&-4\\\hline\end{array}$$

Obr. 5: Příklad násobení čtverce číslem 2

Druhou operací je součet dvou čtverců. Jeho výsledkem je čtverec, který vznikne tak, že na každé jeho políčko umístíme součet čísel ze stejných políček ve sčítaných čtvercích, viz příklad na obr. 6.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3\\\hline -3&-2&-1&0\\\hline 0&0&0&0\\\hline 1&1&1&1\\\hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3&2&1&0\\\hline 1&2&3&0\\\hline -2&0&2&0\\\hline -1&0&1&2\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3&3&3&3\\\hline -2&0&2&0\\\hline -2&0&2&0\\\hline 0&1&2&3\\\hline\end{array}$$

Obr. 6: Příklad sčítání čtverců

Čtvrté pozorování: je stručně zachyceno následující rovností:

$$\text{vybrané řešení}+s\cdot\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0\\\hline 0&1&0&0\\\hline\end{array}+t\cdot\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0\\\hline 0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0\\\hline\end{array}=\text{nové řešení}\tag{1}$$

Shrňme naše pozorování: Nalezneme-li jedno řešení úlohy, můžeme volbou parametrů t a s najít libovolný počet dalších řešení. Asi nezjistíme, zda si autor úlohy a otištěného řešení byl vědom tohoto faktu. Všimněme si, že tento závěr platí bez ohledu na to, jaké konkrétní hodnoty autor zvolil pro vyšrafovaná políčka.

Existuje vůbec nějaké řešení?

Takže zbývá zjistit, zda úloha má alespoň jedno řešení. I když to v zadání úlohy není uvedeno, řešení, ve kterém jsou políčka zaplněna kladnými celými čísly, se nám jistě líbí nejvíce. Přesto na chvíli považujme za řešení jakékoliv doplnění čtverce reálnými čísly při zachování rovnosti řádkových, sloupcových a diagonálních součtů. Hledejme tedy nějaké takové řešení. Z předpisu (1) pro konstrukci nových řešení plyne, že z libovolného řešení získáme vhodnou volbou reálných parametrů t a s nové řešení s nulami v posledních dvou políčkách třetího řádku.

Hledání nového řešení započneme doplněním dvou nul na poslední dvě políčka třetího řádku (obr. 7). Takové řešení má součet 3. řádku 19 a tento součet musíme ctít při dalším doplňování. Nutně tedy vepíšeme číslo -4 na začátek třetího sloupce (obr. 8).

	14		
		10	17
10	9	0	0
		13	

Obr. 7

	14	-4	
		10	17
10	9	0	0
		13	

Obr. 8

Požadavek neměnného součtu nám neumožní přímo doplnit další políčko. Označme proto hodnotu v pravém horním políčku např. x (obr. 9) a vyjádřeme pomocí této neznámé hodnoty dalších políček.

	14	-4	x
		10	17
10	9	0	0
		13	

Obr. 9

Na obr. 10 šipky naznačují, které součty jsme dopočítávali.

$9-x$	14	-4	x
		10	17
10	9	0	0
$-x$		13	$2-x$

Obr. 10

Ještě doplníme poslední řádek a první sloupec. Zbylou neznámou hodnotu označíme $\diamondsuit$ (obr. 11).

$9-x$	14	-4	x
$2x$	$\diamondsuit$	10	17
10	9	0	0
$-x$	$4+2x$	13	$2-x$

Obr. 11

Zbývá doplnit 2. políčko v 2. řádku (graficky označeno $\diamondsuit$). Aby součet čísel 2. řádku, 2. sloupce a diagonály (v tomto pořadí) byl pokaždé 19, musí platit

$$\diamondsuit = -8 - 2x, \quad \diamondsuit = -8 - 2x \quad \text{a} \quad \diamondsuit = 2x + 8. \tag{2}$$

Tomuto požadavku vyhovuje jedině $x = -4$. Po dosazení této hodnoty za neznámou x získáme řešení na obr. 12.

13	14	-4	-4
-8	0	10	17
10	9	0	0
4	-4	13	6

Obr. 12

Trvá-li zadavatel na řešení s kladnými hodnotami, stačí upravit toto řešení pomocí vztahu (1) za použití libovolného $t > 8$ a $s > 4$. Např. volbou $t = s = 9$ dostaneme řešení na obr. 13.

13	14	5	5
1	9	10	17
10	9	9	9
13	5	13	6

Obr. 13: Jedno z řešení s kladnými prvky

Magický čtverec a rovina

Protože neznámá x byla určená rovnicemi (2) jednoznačně, můžeme tvrdit, že každé řešení úlohy o magickém čtverci lze napsat ve tvaru

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 13 & 14 & -4 & -4 \\ \hline -8 & 0 & 10 & 17 \\ \hline 10 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 4 & -4 & 13 & 6 \\ \hline \end{array} + s \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + t \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

S analogicky zapsanými množinami se setkávají i studenti středních škol. Body roviny v třírozměrném prostoru popisujeme buď pomocí rovnice, kterou musí každý její bod (x, y, z) splňovat, např. $2x + 3y - z = 5$, nebo rovinu popisujeme parametricky. Při parametrickém popisu zvolíme pevně jeden bod roviny a obecný bod (x, y, z) je pak vyjádřen pomocí soustavy rovnic se dvěma reálnými parametry, např. s a t. V případě roviny

$$2x + 3y - z = 5$$

je její parametrický popis

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + s(1, 0, 2) + t(0, 1, 3), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

což lze také zapsat:

$$\begin{aligned} x &= 1 + s \\ y &= 1 + t \\ z &= 2s + 3t, \quad s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Můžeme tedy říct s trochou nepřesnosti, že řešení naší úlohy magického čtverce tvoří rovinu v jakémsi prostoru.

Podobně bychom mohli ukázat, že každá posloupnost čísel a_1, a_2, a_3, …, jejíž členy splňují rovnost

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

má n-tý člen tvaru

$$a_n = -1 + s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + t\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt např. v [2].) A tedy opět množina posloupností vyhovujících rovnosti (3) tvoří rovinu v prostoru všech posloupností. Roli čtverců z obr. 3 a obr. 4 teď hrají posloupnosti s členy

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Konstantní posloupnost z čísel -1 pak vystupuje v roli čtverce z obr. 12.

V matematice obdobná situace nastává často. Objekty různé povahy a různého původu vykazují příbuzné chování. Matematici pak identifikují vlastnosti, které tuto příbuznost vynucují. Tak byly ve 30. letech definovány abstraktní vektorové prostory a začalo jejich intenzivní zkoumání. Jeho výsledky jsou dnes zahrnuty v oblasti matematiky známé pod názvem lineární algebra (pro více informací o lineární algebře doporučujeme skripta [1]).

Vše, co matematici odvodili pro obecně definovanou rovinu, lze použít pro každou množinu (ať pochází z jakýchkoliv úloh), která vyhovuje obecné definici roviny. Lze tedy říci, že matematika je věda o strukturách, tj. o objektech popsaných svými vlastnostmi, tzv. axiomy. Některé struktury byly zavedeny hodně dávno, jako např. grupy, definované Évaristem Galoisem (1811–1832) a Nielsem Henrikem Abelem (1802–1829) na počátku 19. století. Jiné struktury, např. kategorie, se objevily až ve druhé polovině 20. století.

V každém případě, struktury pomáhají porozumět podstatě matematických jevů – a matematici je milují, nehledě na to, zda to jsou struktury nové nebo staré.

Matematická rekreace pro pokročilé

Náš návod na řešení úlohy vedl k nalezení „pěkného“ řešení, kdy všechna políčka jsou vyplněna přirozenými čísly. Pozorný čtenář si jistě všiml, že v průběhu řešení nás potkalo třikrát štěstí.

Poprvé, když dvě rovnice (2) pro jednu neznámou x měly řešení; vedly totiž na jedinou rovnici

$$2x - 8 = 8 - 2x.$$

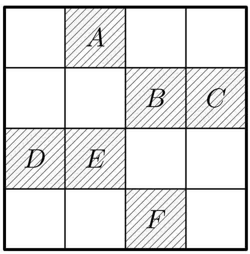
Podruhé, když tato rovnice měla celočíselné řešení (v našem případě $x = -4$).

Potřetí, když po dosazení za proměnnou $x = -4$ jsme dostali v pravém dolním rohu 6 a v levém horním rohu 13, tedy kladné hodnoty. Tato políčka totiž nelze pomocí parametrů s a t nijak měnit.

Úloha pro čtenáře

Rekreační úloha pro čtenáře Rozhledů proto zní: *Popište přirozená čísla A, B, C, D, E a F, pro která má stejná úloha řešení v přirozených číslech (obr. 14).* Jinými slovy, *popište všechny šestice přirozených čísel A, B, C, D, E a F, které zadavatel mohl vepsat do šesti šrafovaných políček tak, aby zachoval existenci „pěkného“ řešení.*

Svá řešení posílejte na adresu redakce časopisu.



Obr. 14: Zadání rekreační úlohy

Literatura

[1] Balková, L.: *Lineární algebra I.* Nakladatelství ČVUT, Praha, 2013.

[2] Lovász, L., Pelikán, J., Vesztergombi, K.: *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.