Rozhledy matematicko-fyzikální

56. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 3, 29–45

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146587

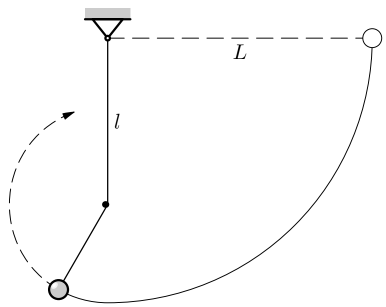
56. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.)

KATEGORIE A

1. Kulička na niti

Na pevné niti délky L je zavěšena malá kulička. Pod bodem závěsu zarazíme hřebík tak, aby se ho nit volně zavěšené kuličky dotýkala. Nit s kuličkou vychýlíme do horizontální polohy a pustíme.



Obr. 1

a) V jaké nejmenší vzdálenosti $l < L$ musíme hřebík zarazit, aby se kulička po průchodu rovnovážnou polohou až do nárazu na svislou část vlákna pohybovala po kružnici?
b) V jaké vzdálenosti $l < L$ musíme hřebík zarazit, aby se kulička po průchodu rovnovážnou polohou pohybovala zčásti po kružnici, zčásti po parabole tak, že zasáhne hřebík?

Rozměry kuličky jsou v porovnání s délkou niti zanedbatelné, odpor vzduchu zanedbáme.

2. Valivý pohyb po nakloněné rovině

Dvě rotační tělesa — plný válec a tenkostěnná válcová trubka — mají stejnou hmotnost m a stejný poloměr r. Tělesa budeme pouštět po nakloněné rovině s úhlem sklonu α tak, že jejich rotační osy budou vodorovné.

a) S jakým zrychlením a_1 se bude valit trubka?
b) S jakým zrychlením a_2 se bude pohybovat plný válec?
c) S jakým zrychlením a_3 se budou pohybovat obě tělesa, pustíme-li je po nakloněné rovině tak, aby byly stále ve vzájemném dotyku?

Tělesa při valení po nakloněné rovině neprokluzují, součinitel tření mezi nimi je f. Moment setrvačnosti válcové trubky vzhledem k její rotační ose $J_1 = mr^2$, moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho rotační ose $J_2 = \frac{1}{2}mr^2$.

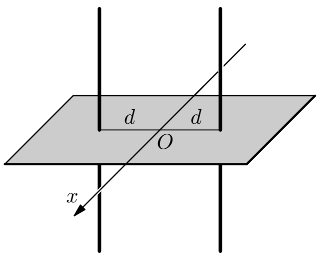
3. Setrvačník

Plná homogenní koule má poloměr R a hmotnost M.
a) Z koule máme vysoustružit setrvačník ve tvaru válce s maximální hmotností. Určete hmotnost m_1 a moment setrvačnosti J_1 tohoto válce vzhledem ke geometrické ose.
b) Z koule máme vysoustružit setrvačník ve tvaru válce s maximálním momentem setrvačnosti. Určete hmotnost m_2 a moment setrvačnosti J_2 tohoto válce vzhledem ke geometrické ose.

4. Magnetické pole dvou rovnoběžných vodičů

Dvěma rovnoběžnými velmi dlouhými vodiči zanedbatelného průřezu umístěnými ve vzájemné vzdálenosti $2d$ procházejí proudy stejné velikosti I. Uvažujme osu x souměrnosti obou vodičů v rovině kolmé k rovině vodičů (obr. 2). Určete na ose x pro $x \in \langle 0, 4d\rangle$ souřadnice míst, kde je velikost magnetické indukce výsledného pole obou vodičů minimální a kde je maximální. Určete velikosti této minimální indukce $B_{\min}$ a maximální indukce $B_{\max}$. Úlohu řešte
a) pro souhlasný směr proudů,
b) pro nesouhlasný směr proudů.

Vzdálenost $4d$ považujte za zanedbatelnou vzhledem k délce vodičů.



Obr. 2

5. Skleněná polokoule

Kolmo na rovinnou plochu homogenní skleněné polokoule o poloměru R dopadá válcový světelný svazek, jehož osa je totožná s osou polokoule. Index lomu skla vzhledem k okolnímu vzduchu je n.

a) Určete maximální průměr $2r$ válcového světelného svazku tak, aby nedošlo na vnitřní kulové ploše k úplnému odrazu světla.

b) Určete interval vzdáleností $(d_{\min}, d_{\max})$ měřený od rovinné plochy polokoule, na němž paprsky protínají optickou osu.

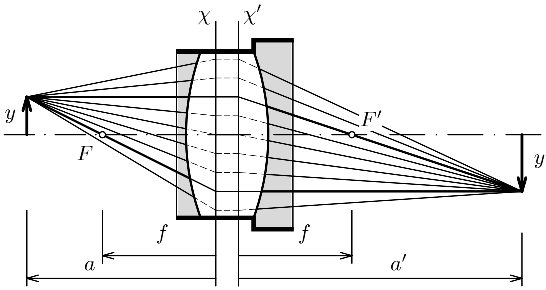
c) Určete ve steradiánech prostorový úhel, do něhož se šíří světlo při výstupu z polokoule.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnotu $n = 1{,}50$.

6. *Praktická úloha*: **Určení ohniskové vzdálenosti a polohy ohnisek a hlavních rovin promítacího objektivu**

Promítací objektiv je tvořen spojnou soustavou několika čoček se společnou optickou osou, která se chová jako jediná **tlustá spojka**, jejíž vlastnosti jsou určeny polohou ohnisek a hlavních rovin (obr. 3). Vzdálenost *předmětového ohniska* F od *předmětové hlavní roviny* χ je stejná jako vzdálenost *obrazového ohniska* F' od *obrazové hlavní roviny* χ' a nazývá se **ohnisková vzdálenost** objektivu. Paprsky přicházející na objektiv rovnoběžně s optickou osou se lámou do obrazového ohniska F'. Paprsky vycházející z předmětového ohniska F vystupují z objektivu rovnoběžně s optickou osou.

Skutečný chod paprsků objektivem je složitý. Výsledek je ale takový, jako by se paprsky lámaly jen na předmětové hlavní rovině χ do směru rovnoběžného s optickou osou a potom na obrazové hlavní rovině χ' do výsledného směru.



Obr. 3

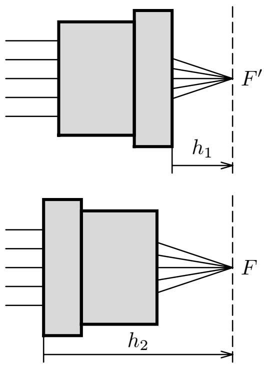
(Pokud je pořadí hlavních rovin opačné (χ' se nachází vlevo od χ), musíme při grafické konstrukci paprsku mezi hlavními rovinami „couvnout".)

Úkol:

Určete ohniskovou vzdálenost a polohu ohnisek a hlavních rovin objektivu ze školního diaprojektoru (Medior, Aspectomat, Praktica apod.).

Provedení úlohy:

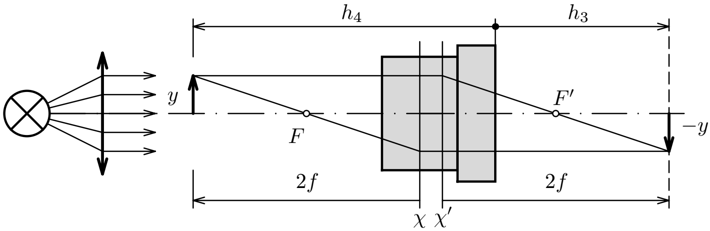
a) Objektiv upevněte pomocí vhodného držáku na optickou lavici, kterou umístíte do blízkosti otevřeného okna. Skleněnou matnicí vyhledejte obrazovou ohniskovou rovinu objektivu, kde vznikne ostrý obraz vzdálených předmětů – budov, stromů – a změřte vzdálenost h_1 matnice od předního okraje objektivu. Pak objektiv otočte, stejným způsobem vyhledejte předmětovou ohniskovou rovinu objektivu a změřte vzdálenost h_2 matnice od předního okraje objektivu (obr. 4).



Obr. 4

b) Na optickou lavici přidejte světelný zdroj a průhledný rovinný předmět známé výšky, například kousek plastového pravítka s milimetrovou stupnicí. Polohu předmětu, objektivu a matnice upravte tak, aby na matnici vznikl skutečný převrácený obraz předmětu, stejně velký, jako je předmět. V takovém případě leží předmět ve vzdálenosti $2f$ od předmětové hlavní roviny χ a obraz ve vzdálenosti $2f$ od obrazové hlavní roviny χ' (obr. 5). Změřte vzdálenosti h_3, h_4 matnice a předmětu od předního okraje objektivu a vypočítejte ohniskovou vzdálenost objektivu

$$f = h_3 - h_1 = h_4 - h_2.$$



Obr. 5

Měření vzdáleností h_1 až h_4 několikrát opakujte a odhadněte přesnost získaných výsledků. Vypočítanou hodnotu ohniskové vzdálenosti porovnejte s jmenovitou hodnotou vyznačenou na obrubě objektivu. Určete také vzdálenosti hlavních rovin objektivu od jeho předního okraje.

7. Polyeny

Polyeny jsou organické látky s tzv. *konjugovanými vazbami*: v lineární molekule se jednoduchá vazba střídá s dvojnou, což dovoluje elektronům v π-orbitalech překryv a poměrně volný pohyb v jednorozměrném koridoru vymezeném skeletem uhlíkových vazeb σ. Uvažujte lineární molekulu tvořenou N uhlíkovými atomy, z nichž každý, který se podílí na dvojné vazbě, přispívá jedním π-elektronem.

V hrubém přiblížení lze na takovou molekulu nahlížet jako na potenciálovou jámu. Střední délka vazby sousedních atomů uhlíku je $a = 141$ pm. Do výpočtu délky L jámy zahrnujeme ještě přesah dráhy $0{,}5a$ u krajního atomu, pokud se podílí na dvojné vazbě. Jak vidno z příkladů

$$N = 2: \quad \mathrm{H_2C{=}CH_2}, \qquad N = 3: \quad \mathrm{H_2C{=}CH{-}CH_3},$$

je počet π-elektronů roven N pro N sudé a je roven $N - 1$ pro N liché, neboť jeden krajní uhlíkový atom netvoří dvojnou vazbu. Proto také u něho nenastává přesah dráhy π-elektronů a délka potenciálové jámy činí pouze

$$L = (N - 1)a + 0{,}5a = (N - 0{,}5)a,$$

kdežto pro N sudé je

$$L = (N - 1)a + 2 \cdot 0{,}5a = Na.$$

Barvu látky tvořené takovými molekulami můžeme odhadnout výpočtem energie potřebné k přechodu elektronu mezi nejvyšší obsazenou (HOMO) a nejnižší neobsazenou (LUMO) hladinou.

a) Z podmínky pro stacionární stavy elektronu určete možné energie E_n π-elektronů v jámě.

b) π-elektrony obsadí energetické hladiny podle Pauliho principu a podle principu minima energie. Určete energie hladin HOMO a LUMO.

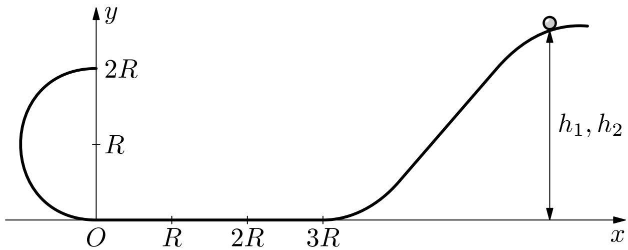
c) Vysvětlete, proč se vlnová délka přechodu HOMO – LUMO posouvá s rostoucím číslem N do dlouhovlnné oblasti. Předpovězte, pro které N, tj. pro který polyen se bude přechod HOMO – LUMO odehrávat již ve viditelné části spektra a jaké vlnové délky světla budou jimi nejvíce pohlcovány.

KATEGORIE B

1. Kulička v drážce

Plná homogenní kulička o poloměru r se může pohybovat mělkým žlábkem v konstrukci podle obr. 1. Část konstrukce má tvar půlkružnice o poloměru R, přičemž platí $r \ll R$. Počáteční výška kuličky nad vodorovnou částí trajektorie je a) $h_1 = 3{,}00R$, b) $h_2 = 2{,}36R$. Určete v obou případech souřadnice x_1, x_2 místa dopadu kuličky na konstrukci.

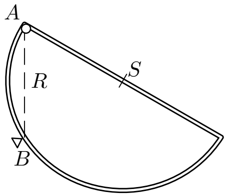
Valivý odpor a odpor vzduchu zanedbejte. Dotyk kuličky se žlábkem je bodový. Po celou dobu dotyku s konstrukcí se kulička valí bez prokluzování.



Obr. 1

2. Smyčka z drátu

Z pevného hladkého homogenního drátu byla vytvořena smyčka tvaru obvodu půlkruhu s poloměrem R a o hmotnosti $m = 0{,}500$ kg. Smyčka je zavěšena v bodě A na hřebík a opřena v bodě B o druhý hřebík, který je umístěn svisle pod prvním hřebíkem ve vzdálenosti R (obr. 2).



Obr. 2

a) Určete polohu těžiště smyčky, víte-li, že těžiště drátu ve tvaru půlkružnice je ve vzdálenosti $\frac{2R}{\pi}$ od jeho středu.
b) Určete úhel α, který by svírala přímá část smyčky se svislým směrem, jestliže by smyčka byla volně zavěšená jen na hřebíku A.
c) Určete velikost a směr sil působících na smyčku v bodech A a B.

3. Padající řetěz

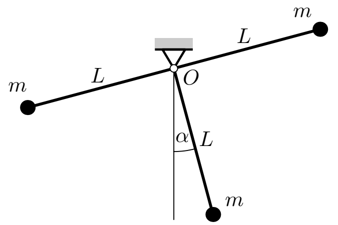
Řetěz délky l a hmotnosti m byl zavěšen za jeden konec ve výšce $h \geq l$ nad zemí. Po uvolnění začal padat k zemi.
a) Určete dobu Δt mezi dopadem prvního a posledního článku řetězu.
b) Určete, jakou maximální kinetickou energii E_{kmax} měl řetěz během pádu.
c) Sestrojte pro dané hodnoty grafy závislosti potenciální, kinetické a celkové mechanické energie řetězu na dráze uražené horním koncem řetězu.

Úlohy a) a b) řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m = 4{,}0$ kg, $l = 7{,}0$ m, $h_1 = 10{,}0$ m, $h_2 = 20{,}0$ m, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

4. Tříbodové kyvadlo

Kyvadlo se skládá ze tří kuliček zanedbatelných rozměrů o hmotnosti m navzájem spojených pevnými tyčemi zanedbatelné hmotnosti tak, že navzájem tvoří písmeno T se stejně dlouhými rameny o délce L (obr. 3). Vodorovná osa kyvadla prochází bodem, ve kterém jsou tyče spojeny, a je kolmá k rovině kyvadla. Kyvadlo vychýlíme z rovnovážné polohy o malý úhel α a pustíme.
a) Určete dobu kmitu T tohoto kyvadla.
b) Určete velikost a směr síly $\boldsymbol{N}$, kterou působí spojovací tyč na spodní kuličku v krajní poloze.

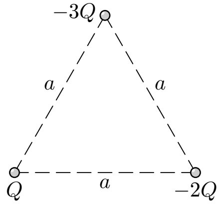
Řešte obecně a pak pro hodnoty $m = 100$ g, $L = 25$ cm, $\alpha = 10°$.



Obr. 3

5. Tři náboje ve vrcholech trojúhelníku

Ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku o délce strany a ve vakuu se nacházejí částice s elektrickými náboji Q, $-2Q$ a $-3Q$ (obr. 4).



Obr. 4

a) Na kterou částici působí největší elektrická síla? Určete její velikost.
b) Určete velikost a směr intenzity elektrického pole v těžišti trojúhelníku.

6. *Praktická úloha*: **Měření relativní permitivity materiálu plastové láhve**

Pomůcky: plastová válcová láhev s rovným povrchem (např. dolní část láhve od minerální vody Mattoni), pruh alobalu, nízkofrekvenční generátor, sluchátko s velkou impedancí, 2 izolační stojánky, konopný provaz, sůl, lepicí páska, nitě, spojovací vodiče, několik kondenzátorů o kapacitě 1 nF až 10 nF.

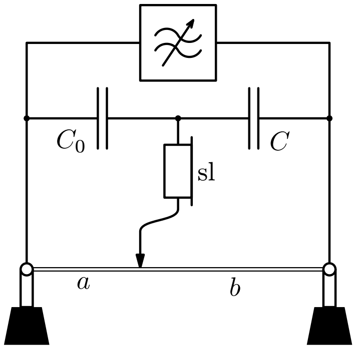
Popis měřicích metod:

a) *Zhotovení válcového kondenzátoru s plastovým dielektrikem*

Plastovou láhev naplníme mírně osolenou vodou. Její hladkou válcovou část obalíme pruhem alobalu, který upevníme lepicí páskou a omotáme nití, aby všude těsně doléhal na láhev. Jeden přívodní drát vedeme pod zátkou do osolené vody, druhý připojíme k alobalovému plášti.

b) *Změření kapacity můstkovou metodou*

Použijeme zapojení podle obr. 5. Ve funkci odporového drátu použijeme konopný provázek navlhčený slanou vodou napnutý mezi dva izolační stojánky. (Elektrická vodivost takového provázku právě vyhovuje potřebám našeho měření a připomíná éru 17. až 19. století, ve které se některé základní elektrické zákony objevovaly pomocí jednoduchých měřicích prostředků.)



Obr. 5

Kapacitu C našeho válcového kondenzátoru porovnáme se známou kapacitou C_0 jiného kondenzátoru. Frekvenci generátoru volíme v oblasti největší citlivosti sluchátka (obvykle 500 Hz až 1 κHz). Pohyblivý kontakt (banánek) posouváme po provázku, až signál ve sluchátku vymizí a můstek je vyvážený. Odměříme délky a, b obou úseků provázku. Platí

$$\frac{X_{C_0}}{X_C} = \frac{C}{C_0} = \frac{a}{b}, \qquad C = C_0 \frac{a}{b}.$$

c) *Určení relativní permitivity plastu láhve*

Je-li obvod láhve s, výška pásu alobalu v, tloušťka stěny láhve d a relativní permitivita ε_r, platí

$$C = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 sv}{d}, \qquad \varepsilon_\mathrm{r} = \frac{Cd}{\varepsilon_0 sv}.$$

Měření kapacity C proveďte několikrát pro různé hodnoty kapacity C_0. Pak kondenzátor rozeberte, láhev rozstříhejte a určete průměrnou tloušťku stěny její válcové části. Určete střední hodnotu relativní permitivity plastu a odchylku měření.

7. Prodlužovací kabel

Zapojíme-li varnou konvici s vodou do síťové zásuvky, uvede se voda do varu za dobu $t_0 = 190$ s. Zapojíme-li varnou konvici s vodou do zásuvky na konci dlouhého prodlužovacího kabelu, jehož zástrčku (opačný konec) zapojíme do původní síťové zásuvky, uvede se voda do varu za dobu $t_1 = 226$ s.

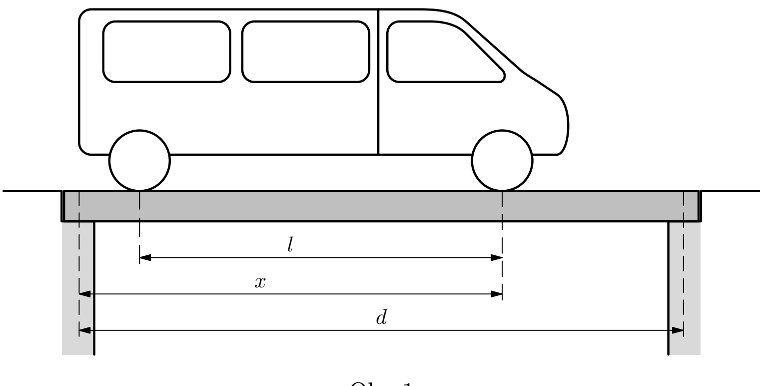
a) Určete dobu t_2, za kterou se uvede do varu voda ve dvou konvicích současně zapojených na konci kabelu. Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Předpokládejme, že v konvici je vždy stejný objem vody se stejnou počáteční teplotou a že účinnost ohřevu je ve všech případech stejná. Odpor R_1 topné spirály konvice a odpor R_v kabelu považujte za konstantní. Síťovou zásuvku považujte za zdroj se zanedbatelným vnitřním odporem.

b) Posuďte, jak uvedené zjednodušující předpoklady ovlivnily výsledek řešení.

KATEGORIE C

1. Automobil na můstku

Dřevěný můstek přes horskou bystřinu má mezi pilíři vzdálenost $d =$ $= 5{,}0$ m. Můstek pomalu přejíždí automobil *Renault Trafic Combi* o hmotnosti $m = 3\,060$ kg a s rozvorem (vzdáleností náprav) $l = 3{,}5$ m (obr. 1). Přední a zadní náprava automobilu jsou zatíženy v poměru 2 : 3. Označme $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ síly, kterými automobil během přejíždění můstku působí na jeho pilíře.



Obr. 1

a) Určete, kdy jsou tyto síly největší a jaké jsou tyto maximální velikosti sil $F_{1\max}$ a $F_{2\max}$.
b) Sestrojte graf závislosti velikostí sil F_1 a F_2 na vzdálenosti x místa dotyku předních kol s vozovkou od prvního pilíře, dokud zadní kola nepřejedou přes druhý pilíř můstku ($x \in \langle 0, d+l \rangle$).
c) Určete délku d' můstku, při níž by na druhý pilíř působila stejně velká síla při nájezdu předních i zadních kol.

2. Cyklistická časovka ve větru

Cyklista absolvoval časovku délky $s = 36{,}00$ km, přičemž trasa vedla po přímé vodorovné silnici k otočce a zpět. Po celou dobu jízdy foukal vítr stálou rychlostí ve směru od startu k otočce. Cyklista dosáhl na trase k otočce času $t_1 = 21{:}36$ min (tj. 21 min 36 s), v opačném směru času $t_2 = 33{:}45$ min. Výkon cyklisty byl po celou dobu jízdy stálý.
a) Určete velikost u rychlosti větru.
b) Určete čas t_0, kterého by za jinak stejných podmínek cyklista dosáhl v časovce za bezvětří, a porovnejte jej s celkovým časem za větru.

Odporová síla vzduchu působící proti pohybu cyklisty je přímo úměrná druhé mocnině rychlosti, tj. $F_{\mathrm{odp}} = kv^2$. Valivý odpor zanedbejte. Dobu rozjezdu a dobu otočky považujte za zanedbatelné.

3. Závody motocyklistů

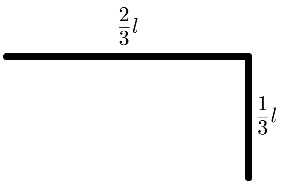
Motocyklista A vjíždí do cílové rovinky rovnoměrně zrychleně se stálým zrychlením o velikosti a. První úsek rovinky před tribunou o délce $l_1 = 200$ m projel za dobu $t_1 = 7{,}2$ s, následující úsek kolem tribuny až do cíle o délce $l_2 = 180$ m za dobu $t_2 = 5{,}3$ s.
a) S jakým stálým zrychlením se motocyklista pohyboval?
b) Jaká byla jeho počáteční rychlost v_{01} na začátku cílové rovinky a jakou rychlostí v_2 projel cílem?
c) V cílové rovince se před motocyklistou A už nacházel motocyklista B, který měl na počátku cílové rovinky stejnou počáteční rychlost v_{01} a náskok $\Delta t = 4{,}0$ s, ale pro poruchu se pohyboval rovnoměrně zpomaleně se zrychlením o velikosti $a_1 = 0{,}10 \mathrm{~m \cdot s^{-2}}$. Který motocyklista vyhrál závod?

V části a) a b) řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

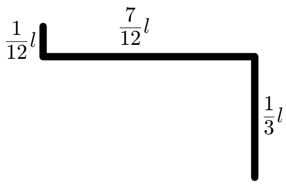
4. Zalomený drát

Pevný stejnorodý drát o délce l zalomíme pod pravým úhlem tak, aby poměr délek byl 2 : 1 (obr 2).

a) V jaké vzdálenosti od konce delší části ho musíme zavěsit na nit, aby tato část byla vodorovná?
b) Jaký sklon zaujme delší část, zvolíme-li bod závěsu v polovině délky celého drátu?
c) Nyní ohneme i druhý konec drátu pod pravým úhlem v opačném směru tak, aby poměr délek částí drátu byl 1 : 7 : 4 (obr. 3). Ve kterém místě musíme drát zavěsit, aby jeho prostřední část byla vodorovná?
d) Jaký sklon zaujme nyní prostřední část, zvolíme-li bod závěsu v polovině délky celého drátu?



Obr. 2



Obr. 3

5. Zahřívání směsi

V tepelně izolované nádobě se nacházela směs ledu a vody. Do nádoby jsme vložili ponorný vařič s tepelným výkonem $P = 400$ W a míchačku, která v nádobě udržovala tepelnou rovnováhu. Na konci každé minuty jsme zapisovali teplotu. První dvě minuty po zapnutí vařiče se teplota neměnila. Ve třetí minutě stoupla o 2,0 °C, ve čtvrté a páté minutě vždy o dalších 8,0 °C.

a) Kolik ledu a kolik vody bylo na počátku v nádobě?
b) Jak dlouho trvalo, než led roztál?
c) Za jak dlouho se voda začala vařit? Za jak dlouho se vyvařila polovina vody v nádobě?

Měrné skupenské teplo tání ledu $l_\mathrm{t} = 332\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, měrná tepelná kapacita vody $c = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, měrné skupenské teplo varu vody $l_\mathrm{v} = 2{,}26\ \mathrm{MJ \cdot kg^{-1}}$.

6. *Praktická úloha*: **Měření součinitele odporu dutého kužele**

Před praktickým provedením této úlohy doporučujeme prostudovat studijní text *Vybíral, Zdeborová: Odporové síly* (Knihovnička FO č. 48), str. 19 až 21.

Pomůcky: váhy, stopky, tenký papír, rýsovací potřeby, délková měřidla.

Popis měřicí metody:

Z tenkého (nejlépe průklepového) papíru vystřihněte dvě kruhové výseče o středovém úhlu 270° a poloměru 10 cm a dvě kruhové výseče o středovém úhlu 225° a stejném poloměru. Z těchto výsečí slepte pomocí úzkého proužku tenké izolepy papírové kornouty.

a) Kornouty zvažte a vypočítejte jejich vrcholové úhly a poloměry podstav.

b) Změřte teplotu a tlak vzduchu v místnosti a pomocí stavové rovnice určete hustotu vzduchu, ve kterém provedete měření. Při teplotě 0 °C a tlaku 10^5 Pa je hustota suchého vzduchu $\varrho_0 = 1{,}276\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Úlohy c) a d) proveďte nejprve s dvojicí kornoutů s větším vrcholovým úhlem a potom se zbývajícími dvěma kornouty.

c) Pozorujte pád kornoutu otočeného vrcholem dolů od stropu místnosti z co největší výšky h_0. Účinkem odporu vzduchu se rychlost kornoutu velmi brzy ustálí a jeho pohyb bude rovnoměrný. Rychlost pádu určete z doby, která uplyne od průletu kornoutu kolem značky ve výšce $h < h_0$ do jeho dopadu na podlahu místnosti. Volte $h_0 - h > 0{,}5$ m. Měření doby pádu několikrát zopakujte a stanovte aritmetický průměr naměřených hodnot.

d) Úlohu c) opakujte se dvěma kornouty vloženými do sebe. Ověřte, že velikost odporové síly působící na kornouty je přímo úměrná druhé mocnině rychlosti. Kornout složený ze dvou kornoutů má dvakrát větší hmotnost než jeden samostatný, proto by jeho rychlost měla být $\sqrt{2}$krát větší než rychlost jednoduchého kornoutu – pokud platí *Newtonův vztah*

$$F = \frac{1}{2} C \varrho S v^2 = mg,$$

e) Ze známé hustoty vzduchu, hmotnosti a rozměrů kornoutu a jeho ustálené rychlosti při pádu určete součinitel odporu C dutého kužele s daným vrcholovým úhlem.

f) Ze stejného papíru vyrobte kornouty o stejných vrcholových úhlech, ale jiných poloměrech podstavy. Ověřte, že ustálené rychlosti pádu kornoutů se stejnými vrcholovými úhly jsou stejné, a vysvětlete to.

g) Porovnejte vypočtené hodnoty součinitele odporu C s hodnotami uvedenými v učebnici fyziky pro jiné tvary těles.

7. Kuličky v kapalinách

Do široké kádinky nalijeme postupně vodu ($\varrho_1 = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$), rtuť ($\varrho_2 = 13\,600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) a olej ($\varrho_3 = 900\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$), vždy do výšky 2 cm. Kapaliny se navzájem nemísí. Do této kádinky vhodíme tři kuličky o průměru 1 cm: ocelovou ($\varrho_4 = 7\,800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$), voskovou ($\varrho_5 = 960\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) a dřevěnou ($\varrho_6 = 600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$).

a) Kde se budou tyto kuličky nacházet, až se jejich pohyb zastaví?
b) Kolik % objemu každé kuličky bude ponořeno a ve které kapalině?
c) Jaká vztlaková síla působí na každou z kuliček?
d) Jaká bude hloubka ponoru každé kuličky?

Rovnici, ke které dojdete při řešení úlohy d), řešte vhodnou numerickou metodou. Objem kulové úseče

$$V = \pi r v^2 - \frac{1}{3}\pi v^3,$$

kde r je poloměr koule a v výška úseče.

KATEGORIE D

1. Vlak na zpomaleném úseku

Vlak délky 210 m se pohyboval stálou rychlostí 28 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a před mostem délky 366 m začal brzdit tak, že během doby 25 s rovnoměrně zpomaleného pohybu klesla jeho rychlost na 12 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. V tom okamžiku začal najíždět na most, po němž se touto rychlostí pohyboval. V okamžiku, kdy poslední vagón most opouštěl, začal zrychlovat se zrychlením 0,40 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, až dosáhl konečné rychlosti jako před brzděním.

a) Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase od okamžiku začátku brzdění do okamžiku dosažení konečné rychlosti.
b) Určete časový náskok, kdyby mohl celý úsek projet původní rychlostí.

2. Brzdící traktor

Traktor jede po vodorovné vozovce rovnoměrným pohybem tak, že se jeho zadní kola otočí 5krát za dobu t_1. Poté rovnoměrně zpomaleným pohybem bez prokluzování kol zastaví, přičemž se přední kola otočí 3krát. Poloměr zadního kola traktoru je R, poloměr předního kola traktoru $r = \frac{2}{3}R$.

a) Určete úhlovou rychlost ω otáčení předního kola před brzděním.
b) Určete velikost v rychlosti traktoru před brzděním.

c) Určete velikost a zrychlení traktoru během brzdění, dobu t_2 brzdění a brzdnou dráhu s.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty $t_1 = 6{,}0$ s, $R = 0{,}69$ m.

3. Zrychlující motocyklista

Motocyklista se při výjezdu z obce začal pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem z počáteční rychlosti $v_0 = 50\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a na dráze $s = 130$ m dosáhl konečné rychlosti $v = 90\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Hmotnost jezdce s motocyklem je $m = 220$ kg.

a) Určete dobu t zrychlování a velikost a zrychlení motocyklu.

b) Určete průměrný výkon P během zrychlování.

c) Určete minimální výkon P_{min} a maximální výkon P_{max} během zrychlování.

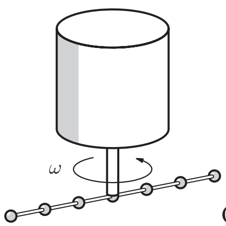
Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Odpor vzduchu a valivý odpor zanedbejte.

4. Sedm rotujících kuliček

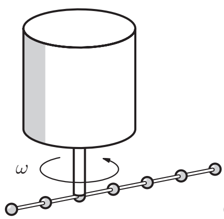
Na tyčce zanedbatelné hmotnosti je rovnoměrně napevno rozmístěno 7 kuliček o stejné hmotnosti m. Vzdálenost mezi středy sousedních kuliček je l. Tyčka s kuličkami je ve vodorovné poloze upevněna k rotoru elektromotoru se svislou osou otáčení tak, že střed prostřední kuličky se nachází v ose otáčení a otáčí se rovnoměrně úhlovou rychlostí ω (obr. 1).

a) Určete velikosti odstředivých sil, kterými je tyčka mezi jednotlivými kuličkami napínána, a kinetickou energii soustavy kuliček.

b) Upevnění tyčky k rotoru posuneme o jednu kuličku, to znamená, že dostaneme proti sobě soustavu čtyř a dvou kuliček (obr. 2). Rotor opět roztočíme, až dosáhne úhlové rychlosti ω. Určete velikost celkové odstředivé síly, kterou je namáhána osa otáčení, a kinetickou energii soustavy kuliček.



Obr. 1



Obr. 2

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m = 60$ g, $l = 10$ cm, $\omega = 9{,}0\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

5. Cyklista s odporem vzduchu

Cyklista vyjížděl kopec se stálým sklonem $\alpha = 3{,}3°$ stálou rychlostí o velikosti $v_1 = 5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Po obrátce sjížděl rychlostí o velikosti $v_2 = 14{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, přičemž jeho výkon byl stejný jako při jízdě do kopce. Hmotnost cyklisty s kolem je $m = 78$ kg. Po celou dobu jízdy bylo bezvětří. Velikost odporové síly vzduchu působící proti pohybu je přímo úměrná velikosti rychlosti, tj. platí $F_{\mathrm{odp}} = kv^2$. Sílu valivého odporu považujte za zanedbatelnou.

a) Určete hodnotu koeficientu k a výkon P cyklisty.
b) Určete velikost v_3 rychlosti, které by dosáhl bez šlapání při jízdě z kopce. Výsledek vyjádřete též obecně pouze pomocí velikostí rychlostí v_1 a v_2.
c) Určete velikost v_0 rychlosti, které by za bezvětří dosáhl se stejným výkonem na vodorovné rovině.

6. *Praktická úloha*: **Měření součinitele smykového tření**

Teorie:

Těleso uvedené impulsem síly do pohybu po vodorovné podlaze koná vlivem třecí síly rovnoměrně zpomalený pohyb. Ze změřené dráhy s a změřené doby t tohoto pohybu lze určit součinitel f smykového tření podle vzorce

$$f = \frac{2s}{gt^2}.$$

Úkoly:

a) Odvoďte výše uvedený vzorec.
b) Proveďte měření s dvěma tělesy na dvou různých površích, např. kameninový souvislý povrch chodby, palubovka v tělocvičně, linoleum ve velké místnosti apod. Na podlaze vyznačte startovací čáru. Pro každé těleso měřte desetkrát dráhu a čas. Pro každou dvojici hodnot dráha a čas vypočtěte součinitel smykového tření a z nich vypočtěte aritmetický průměr, průměrnou a relativní odchylku měření. Ke zpracování doporučujeme využít program Excel.
c) Zformulujte závěr, posuďte v něm též nepřesnost měření dráhy a času a uveďte jejich příčiny.

Pomůcky: tělesa (hokejový puk, železný disk, zatížená papírová krabice, dřevěný kvádr, dlaždice apod.), pásmo, stopky

hokejový puk na kameninové dlažbě			železný disk na kameninové dlažbě			hokejový puk na palubovce			železný disk na polubovce		
t / s	s / m	f	t / s	s / m	f	t / s	s / m	f	t / s	s / m	f
Aritm. průměr			Aritm. průměr			Aritm. průměr			Aritm. průměr		
Prům. odchylka			Prům. odchylka			Prům. odchylka			Prům. odchylka		
Relat. odchylka			Relat. odchylka			Relat. odchylka			Relat. odchylka		

7. Dvě družice Země

Elida obíhá kolem Země po elipse s délkou hlavní poloosy $a = 17\,000$ km a s číselnou výstředností $\varepsilon = 0{,}6$. Družice Kruda obíhá po kružnici se shodnou periodou.

a) Určete pro družici Elidu délku b vedlejší poloosy, výstřednost e, vzdálenosti r_p perigea a r_a apogea od středu Země a pro družici Krudu poloměr r její trajektorie.

b) Zvolte na čtverečkovaném nebo milimetrovém papíru střed S elipsy a v měřítku $a \mathrel{\widehat{=}} 5$ cm, případně $a \mathrel{\widehat{=}} 5$ jednotek (jednotkových délek), vyznačte polohy ohnisek F_1, F_2 a polohy hlavních a vedlejších vrcholů elipsy. S využitím vlastnosti $|F_1X| + |F_2X| = 2a$ sestrojte pomocí kružítka několik dalších bodů elipsy a elipsu dokreslete. Dále do obrázku sestrojte trajektorii družice Krudy.

c) Určete periodu T oběhu obou družic.

d) Určete pro družici Elidu poměr velikostí rychlostí $\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}}$ v perigeu a v apogeu.

e) Určete velikost kruhové rychlosti družice Krudy.

Gravitační konstanta je $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, hmotnost Země je $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.