Emil Calda

Matematické hrátky s jedním schématem

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 3, 26–28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146586

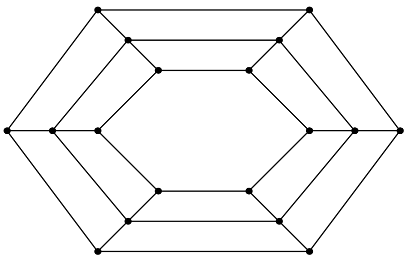
PRO ŽÁKY ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Matematické hrátky s jedním schématem

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with an easy problem of a net with eighteen points and thirty segments.

Na obr. 1 je vyznačeno osmnáct bodů, které jsou propojeny třiceti úsečkami. Představme si, že ke každému z těchto bodů je zcela libovolně připsáno jedno z čísel 1, 2. 3, . . . , 17, 18, a položme si otázku:



Obr. 1

Dá se v tomto schématu, ať jeho body očíslujeme jakkoli, vždycky najít úsečka, pro jejíž krajní body s čísly x, y platí $|x - y| \geq 4$?

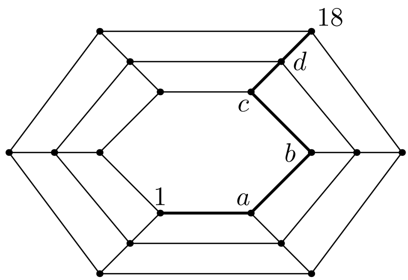
Provedete-li si několik pokusů s různým očíslováním daných bodů, zjistíte sice, že v každém z nich úsečku s touto vlastností najdete, ale pokud byste na základě získaných výsledků usoudili, že se vám to podaří ve všech očíslováních, mohli byste se mýlit. Jedna možnost, jak dokázat existenci takové úsečky v libovolném očíslování, je ta, že všechna prověříme; pro velmi velký počet možností (jejich počet určíme na závěr) a také kvůli tomu, že by se jednalo o „netvůrčí" činnost stereotypně se opakující, však od tohoto způsobu upustíme. Zvolíme proto postup „matematičtější" a dokážeme, že platí:

V každém očíslování bodů daného schématu existuje aspoň jedna úsečka, pro jejíž krajní body s čísly x, y platí $|x - y| \geq 4$.

Prohlédnete-li si pozorně obr. 1, zjistíte, že nejkratší cesta, která vede po úsečkách daného schématu z libovolného bodu do jakéhokoli jiného, se skládá nejvýše z pěti úseček. Znamená to, že v každém schématu se nejvýše z pěti úseček skládá i každá nejkratší cesta z bodu s číslem 1 do bodu s číslem 18. K důkazu dané věty proto rozlišíme pět možností podle toho, zda v tomto schématu existuje nejkratší cesta spojující body s čísly 1 a 18, která je složená z jedné, dvou, tří, čtyř, nebo pěti úseček.

Uvažujme nejprve očíslování, v němž se nejkratší cesta z bodu s číslem 1 do bodu s číslem 18 skládá z pěti úseček tak, že podle obr. 2 postupně projdeme body s čísly a, b, c, d. Předpokládejme, že na této cestě neexistuje úsečka, pro kterou je absolutní hodnota rozdílu čísel v jejích krajních bodech větší nebo rovna čtyřem. Znamená to, že pro každou úsečku je tato absolutní hodnota nejvýše rovna třem, takže platí

$$|1-a| \leq 3, \quad |a-b| \leq 3, \quad |c-b| \leq 3, \quad |d-c| \leq 3, \quad |d-18| \leq 3.$$



Obr. 2

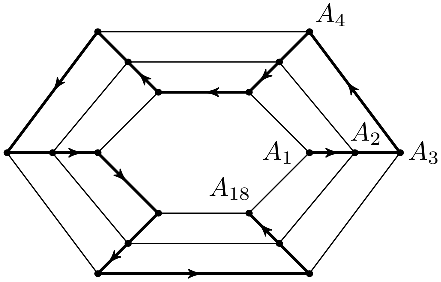
Aby platilo všech pět těchto nerovností, musí být a nejvýše rovno čtyřem, odkud postupně dostaneme, že b je nejvýše rovno sedmi, c je nejvýše rovno deseti a d je nejvýše rovno číslu třináct; je-li však $d \leq 13$, je $|d-18| > 3$, což je spor s předpokladem, že $|d-18| \leq 3$.

Tím je dokázáno, že v očíslování bodů daného schématu, v němž se nejkratší cesta z bodu s číslem 1 do bodu s číslem 18 skládá z pěti úseček, úsečka s krajními body v číslech x, y, pro něž platí $|x-y| \geq 4$, existuje.

Podobným způsobem si už jistě dokážete sami, že úsečka uvedené vlastnosti existuje i v každém očíslování, ve kterém se nejkratší cesta z bodu s číslem 1 do bodu s číslem 18 skládá nejvýše ze dvou, tří, nebo čtyř úseček. A co když jsou tyto body spojeny jedinou úsečkou? Také v tomto případě věta platí, neboť $|1-18| \geq 4$.

Dokázali jsme, že uvedená věta platí v každém očíslování, v němž je nejkratší cesta mezi body s čísly 1 a 18 tvořena jednou, dvěma, třemi, čtyřmi, nebo pěti úsečkami. Protože jiná očíslování neexistují, platí tato věta ve všech možných očíslováních, což jsme měli dokázat.

Zbývá zjistit, jak jsme slíbili v úvodu, kolika způsoby je možno všech osmnáct bodů daného schématu očíslovat. Představme si, že očíslujeme všechny body na vyznačené lomené čáře na obr. 3, která má počátek v bodě A_1 a konec v bodě A_{18}. Očíslováním jejích bodů je určeno očíslování bodů schématu a také obráceně očíslováním bodů schématu je určeno očíslování bodů lomené čáry. Znamená to, že počet všech možných očíslování bodů daného schématu je roven počtu očíslování všech bodů této lomené čáry.



Obr. 3

Počet způsobů očíslování bodů na vyznačené lomené čáře dostaneme snadno, když si uvědomíme, že pro očíslování bodu A_1 máme 18 možností a pro očíslování každého dalšího vždy o jednu možnost méně: pro sousední bod A_2 je 17 možností, možností očíslování dalšího bodu A_3 je celkem 16 a tak pokračujeme až do koncového bodu A_{18}, pro který zůstane jediná možnost. Máme tak výsledek:

Počet všech způsobů očíslování bodů daného schématu je roven součinu

$$18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Máte-li zájem, můžete tento součin určit blíže.

Literatura

[1] Dynkin, E. B., Molčanov, S. A., Rozenmal, A. L., Tolpygo, A. K.: *Matěmatičeskie zadači.* Nauka, Moskva, 1965.