Rozhledy matematicko-fyzikální

Pavel Calábek

7. Středoevropská matematická olympiáda

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 1, 40–43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146565

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ZPRÁVY

7. Středoevropská matematická olympiáda

Pavel Calábek, PřF UP, Olomouc

Sedmý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se uskutečnil ve dnech 22.–28. srpna 2013 v maďarském Veszprému. Soutěže se zúčastnilo 60 žáků z deseti zemí střední Evropy (České republiky, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska).

České reprezentační družstvo pro 7. ročník MEMO bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 62. ročníku české MO. Jeho členy se stalo šest nejlepších soutěžících z nematuritních ročníků středních škol, kteří v roce 2013 nebyli vybráni do reprezentačního družstva na mezinárodní matematické olympiádě. Do družstva České republiky tak byli nominováni *Martin Hora* z G v Plzni, Mikulášské nám. 23, *Matěj Konečný* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8, *Viktor Němeček* z G v Jihlavě, *Tomáš Novotný* z G v České Lípě, *Martin Raszyk* z G v Karviné a *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně. Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. Jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *Mgr. Michal Rolínek* z Institutu vědy a technologie ve Vídni. Česká účast byla hrazena z prostředků Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Jednoty českých matematiků a fyziků. Přípravné soustředění českého týmu před MEMO finančně podpořil Motorpal Jihlava.

Zatímco den po příjezdu soutěžící poznávali krásy Veszprému, vedoucí družstev tvořící mezinárodní *jury* vybírali soutěžní úlohy a připravovali jejich systém hodnocení. V sobotu 24. srpna proběhla soutěž jednotlivců a o den později i soutěž družstev. První soutěžní den byly žákům předloženy v soutěži jednotlivců čtyři úlohy, druhý den v soutěži družstev osm úloh. První den měli soutěžící na vypracování řešení 5 hodin čistého času, každý příklad byl ohodnocen nejvýše 8 body. Druhý den řešila jednotlivá reprezentační družstva společně osm úloh, opět po dobu pěti hodin a každý příklad byl ohodnocen opět nejvýše 8 body. Jako osmá úloha v soutěži družstev byla zařazena i česká úloha od *Michala Rolínka*. Dva následující dny po soutěži byl pro soutěžící připraven poznávací program po středním Maďarsku, v rámci kterého došlo i na koupání v blízkém Balatonu. Mezinárodní jury mezitím hodnotila vypracovaná řešení.

Večer 27. srpna se konal závěrečný slavnostní ceremoniál, kde organizátoři vyhlásili výsledky. V soutěži jednotlivců byli tři nejlepší ohodnoceni zlatými medailemi (všichni z Maďarska), dalších třináct stříbrnými a devatenáct soutěžících bronzovými medailemi. Navíc šestnáct žáků obdrželo čestná uznání za úplné vyřešení aspoň jedné úlohy. Je potěšitelné, že se mezi oceněnými neztratili ani čeští žáci. *Martin Hora* a *Tomáš Novotný* byli ohodnoceni po 17 bodech (6.–12. místo) a získali stříbrné medaile. *Viktor Němeček* s 12 body (20.–21. místo) získal bronzovou medaili. *Matěj Konečný*, *Martin Raszyk* a *Pavel Turek* obdrželi čestná uznání (36.–44. místo, 9 bodů). V dosavadní historii MEMO se tak jedná o nejlepší výsledek českého družstva, což podtrhuje i třetí místo (za Maďarskem a Polskem) v neoficiální soutěži národů, do níž se započítává součet bodů získaných všemi žáky v soutěži jednotlivců.

V soutěži družstev zvítězilo Polsko (57 bodů), následováno Maďarskem (53 b.) a Německem (40 b.). České družstvo pokračovalo v nečekaně dobrých výsledcích a spolu se Slovenskem (po 33 b.) obsadilo dělené 4.–5. místo. Uveďme pro představu počty zlatých, stříbrných a bronzových medailí vybojovaných jednotlivými družstvy v soutěži jednotlivců: Česká republika (0–2–1), Chorvatsko (0–1–1), Litva (0–0–2), Maďarsko (3–2–0), Německo (0–0–3), Polsko (0–3–3), Rakousko (0–0–2), Slovensko (0–2–3), Slovinsko (0–1–2), Švýcarsko (0–2–2). Zájemci mohou získat podrobnější informace na internetových stránkách soutěže `http://memo2013.mik.uni-pannon.hu/`.

Následují zadání všech dvanácti soutěžních úloh, za úlohou je uvedena navrhující země.

Soutěž jednotlivců (24. srpna 2013)

1. Nechť pro kladná reálná čísla a, b, c platí

$$a + b + c = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Dokažte platnost nerovnosti

$$2(a + b + c) \geq \sqrt[3]{7a^2b + 1} + \sqrt[3]{7b^2c + 1} + \sqrt[3]{7c^2a + 1}.$$

Určete všechny trojice (a, b, c), pro které nastane rovnost.

(*Slovensko*)

2. Nechť n je kladné celé číslo. Na desce sestávající ze $4n \times 4n$ čtvercových polí je umístěno $4n$ kamenů tak, že každý řádek i každý sloupec obsahuje jeden kámen. V jednom kroku můžeme jeden z kamenů přesunout na stranou sousedící pole. Několik kamenů se může současně nacházet na stejném poli. Cílem je obsadit kameny všechna pole jedné ze dvou úhlopříček. Určete nejmenší číslo $k(n)$, pro něž je možné tohoto stavu dosáhnout po nejvýše $k(n)$ krocích bez ohledu na počáteční rozmístění kamenů. (*Německo*)

3. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB. Pro jeho vnitřní bod N platí $2|\angle ANB| = 180° + |\angle ACB|$. Nechť D je průsečík přímky BN s přímkou rovnoběžnou s AN procházející bodem C. Bod P je průsečíkem os úhlů CAN a ABN. Dokažte, že přímky DP a AN jsou navzájem kolmé. (*Chorvatsko*)

4. Nechť a a b jsou kladná celá čísla. Dokažte, že existují kladná celá čísla x a y, pro něž platí

$$\binom{x+y}{2} = ax + by.$$

(*Maďarsko*)

Soutěž družstev (25. srpna 2013)

1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1.$$

(*Patrik Bak, Slovensko*)

2. Nechť pro čísla $x, y, z, w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $x + y \neq 0$, $z + w \neq 0$ a $xy + zw \geq 0$. Dokažte platnost nerovnosti

$$\left(\frac{x+y}{z+w} + \frac{z+w}{x+y}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \geq \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{w} + \frac{w}{y}\right)^{-1}.$$

(*Švýcarsko*)

3. Na severní straně ulice stojí $n \geq 2$ domů. Domy jsou očíslovány od západu k východu po řadě čísly 1 až n. Číslo každého domu je napsáno na tabulce. Jednou se obyvatelé ulice rozhodli potrápit pošťáka a zaměnit tabulky následujícím způsobem: každá dvojice sousedních domů si daný den vymění tabulky právě jednou. Kolik možných pořadí tabulek mohou obyvatelé ulice na konci dne takto získat?

(*Maďarsko*)

4. V rovině uvažujme konečný počet bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Každý z těchto bodů lze obarvit buď červeně, nebo zeleně tak, aby libovolný trojúhelník s vrcholy stejné barvy obsahoval alespoň jeden bod jiné barvy. Najděte největší možný počet bodů s touto vlastností. (*Maďarsko*)

5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník PQR tak, aby $|AB| = 2|PQ|$, $|BC| = 2|QR|$, $|CA| = 2|RP|$ a aby přímky PQ, QR a RP procházely po řadě body A, B a C. (Všechny body A, B, C, P, Q a R jsou navzájem různé.) (*Rakousko*)

6. Nechť K je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC takový, že přímka BC je společnou tečnou kružnic opsaných trojúhelníkům AKB a AKC. Průsečík přímek CK a AB označme D a průsečík přímek BK a AC označme E. Nechť F je průsečík přímky BC s osou úsečky DE. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC protíná kružnici k se středem F a poloměrem FD v bodech P a Q. Dokažte, že PQ je průměr kružnice k. (*Slovensko*)

7. Do polí tabulky 2013×2013 byla postupně zleva doprava a shora dolů zapsána čísla od 1 do 2013^2. Poté jsme současně smazali každý řádek a každý sloupec obsahující alespoň jednu druhou mocninu celého čísla. Kolik polí zůstalo? (*Rakousko*)

8. Na tabuli je napsán výraz

$$\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square.$$

Dva hráči, A a B, se střídají v tazích v následující hře, přičemž hráč A začíná. V každém tahu hráč nahradí symbol $\square$ kladným celým číslem. Když jsou všechny symboly $\square$ nahrazeny, hráč A nahradí každé ze znamének $\pm$ buď $+$, nebo $-$ (nezávisle na ostatních). Hráč A vyhraje, pokud hodnota výrazu na tabuli není dělitelná žádným z čísel $11, 12, \ldots, 18$. V opačném případě vyhraje hráč B. Rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii. (*Česká republika*)