

Rozhledy matematicko-fyzikální

Martin Malý

Zajímavé kombinatorické identity

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 1, 1–3

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146502>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2013

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Zajímavé kombinatorické identity

Martin Malý, Brno

Abstract. The paper introduces six combinatorial identities “hidden” in Pascal’s triangle. The proofs of these identities are based on the definition of binomial coefficient.

Vyjděme z tabulky 1:

$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{0}$	$\binom{4}{0}$				
1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{3}{4}$	4	$\frac{4}{5}$	5
$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{5}{1}$				
1	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{3}{5}$	10	$\frac{2}{3}$	15
$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{2}$				
1	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{2}{5}$	10	$\frac{1}{2}$	20	$\frac{4}{7}$	35
$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{7}{3}$				
1	$\frac{1}{5}$	5	$\frac{1}{3}$	15	$\frac{3}{7}$	35	$\frac{1}{2}$	70
$\binom{4}{4}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{8}{4}$				

Tab. 1. Rovnoběžníkový výběr z prvních devíti řádků Pascalova trojúhelníku doplněný o zlomky ve významu podílu tvaru $\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k}$, kde $k \in \{1, \dots, 4\}$, $n \in \{k, \dots, k+3\}$.

Význam tabulky je zřejmý. Lze z ní vyčíst, že např.:

$$\binom{2}{2} : \binom{3}{2} + \binom{2}{1} : \binom{3}{1} = 1$$

$$\binom{4}{1} : \binom{5}{1} + \binom{4}{4} : \binom{5}{4} = 1$$

$$\binom{7}{4} : \binom{8}{4} + \binom{7}{4} : \binom{8}{4} = 1$$

MATEMATIKA

Pokusme se pro uvedené tři rovnosti najít společný tvar. Vidíme, že na levé straně každé z nich lze levý sčítanec nahradit výrazem

$$\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k}.$$

Zbývá zkusit najít „vhodný“ společný tvar pravých sčítanců, kterým je zřejmě výraz

$$\binom{n}{n-k+1} : \binom{n+1}{n-k+1}.$$

Dostáváme tak výraz

$$\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} + \binom{n}{n-k+1} : \binom{n+1}{n-k+1},$$

od kterého se po porovnání s tabulkou 1 můžeme odvážit přejít k hypotéze o platnosti identity

$$\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} + \binom{n}{n-k+1} : \binom{n+1}{n-k+1} = 1, \quad (1)$$

kde $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

Podobně dospějeme k hypotézám o dalších pěti identitách:

$$\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} = \binom{(n+1)i-1}{ki} : \binom{(n+1)i}{ki}, \quad (2)$$

kde $k, n, i \in \mathbb{N}$, $k \leq n$,

$$\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} = \binom{(n+1)i-1}{(k+1)i-1} : \binom{(n+1)i-1}{(k+1)i}, \quad (3)$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$, $n, i \in \mathbb{N}$, $k < n$,

$$\binom{n}{(n+1):2} : \binom{n+2}{(n+3):2} = \binom{n+1}{(n+1):2} : \binom{n+3}{(n+3):2}, \quad (4)$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $2 \nmid n$,

$$\binom{n}{k} - \binom{n+1}{k} = \binom{n}{n-k+2} - \binom{n+1}{n-k+2}, \quad (5)$$

kde $k, n \in \mathbb{N}$, $1 < k \leq n$,

$$\binom{n}{(n+1):2} - \binom{n}{(n+3):2} = \binom{n+1}{(n+1):2} - \binom{n+1}{(n+3):2}, \quad (6)$$

kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $2 \nmid n$.

Na ukázkou dokážeme identitu (1). Důkazy zbývajících pěti identit přenecháváme čtenáři k procvičení.

Důkaz. Buďte $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, libovolná čísla. Pak

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} + \binom{n}{n-k+1} : \binom{n+1}{n-k+1} &= \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} : \frac{(n+1)!}{k![(n+1)-k]!} + \\ + \frac{n!}{(n-k+1)![n-(n-k+1)]!} : \frac{(n+1)!}{(n-k+1)![(n+1)-(n-k+1)]!} &= \\ = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k+1)!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \cdot \frac{(n-k+1)!k!}{(n+1)!} &= \\ = \frac{n-k+1}{n+1} + \frac{k}{n+1} = \frac{n-k+1+k}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen.

Literatura

- [1] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vyd., Prometheus, Praha, 2008.