Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 4, 51–56

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146499`

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. března 2013* na adresu redakce.

Úloha 31. Určete všechna přirozená čísla $n \geq 2$ a přirozená čísla x_1, x_2, $\ldots$, x_n, pro která platí

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n \qquad \text{a} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 32. *Cesta spěšným vlakem*

Cestující vyjel v 17:31 spěšným vlakem Sp 1992 Chrudimka ze železniční stanice Chrast u Chrudimi a v 17:43 dorazil po ujetí 12 km za dobu t do Chrudimi. Uvažujte, že se spěšný vlak ze stanice Chrast nejprve rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem po dobu $t_1 = \frac{t}{4}$, pak se po dobu $t_2 = \frac{t}{2}$ pohybuje rovnoměrným pohybem a před stanicí Chrudim začne rovnoměrně zpomaleně brzdit tak, aby ve stanici Chrudim právě zastavil.

a) Určete průměrnou rychlost vlaku, zrychlení (zpomalení) vlaku na začátku (konci) jízdy, délky jednotlivých úseků a maximální rychlost pohybu.
b) Nakreslete ve sledovaném úseku (ve vhodném měřítku) graf závislosti rychlosti pohybu na čase.

(*Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 2/2012

Úloha 27. Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku s celočíselnými délkami stran má poloměr kružnice vepsané tomuto trojúhelníku také celočíselnou hodnotu. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení:

Pravoúhlý trojúhelník označme ABC s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c. Platí pro něj $a^2 + b^2 = c^2$.

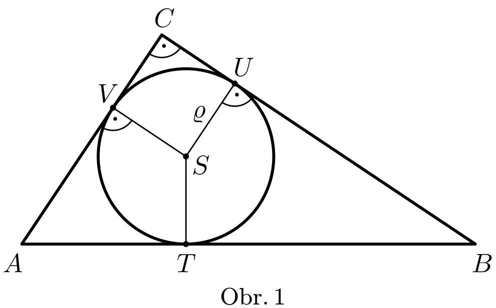
Délky všech tří stran nemohou být lichá čísla; kdyby tomu tak bylo, byla by levá strana rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$ číslo sudé a pravá strana číslo liché. Ze stejného důvodu nemůže být délka jedné odvěsny číslo sudé, délka druhé odvěsny číslo liché a délka přepony číslo sudé. Také z téhož důvodu nemohou být délky odvěsen čísla sudá a délka přepony číslo liché.

Nemohou být ani délky odvěsen lichá čísla a délka přepony sudé číslo; kdyby délky odvěsen byla lichá čísla $2k - 1$, $2l - 1$ a délka přepony sudé číslo $2m$, kde k, l, m jsou přirozená čísla, byla by levá strana

$$(2k - 1)^2 + (2l - 1)^2 = 4(k^2 + l^2 - k - l) + 2$$

dělitelná čtyřmi se zbytkem 2, kdežto pravá strana $(2m)^2 = 4m^2$ by byla dělitelná čtyřmi beze zbytku.

V uvažovaném pravoúhlém trojúhelníku mohou tedy být buď délky všech stran sudá čísla, nebo délka jedné odvěsny sudé číslo a délky dvou zbylých stran lichá čísla.



Obr. 1

Pokud jsou body dotyku vepsané kružnice trojúhelníku ABC označeny T, U, V podle obr. 1, je

$$|AT| + |BT| = c, \quad |AT| + |CV| = b, \quad |BT| + |CV| = a.$$

Z této soustavy rovnic dostaneme

$$|AT| = \frac{-a+b+c}{2} = s-a, \qquad |BT| = \frac{a-b+c}{2} = s-b,$$
$$|CV| = \frac{a+b-c}{2} = s-c,$$

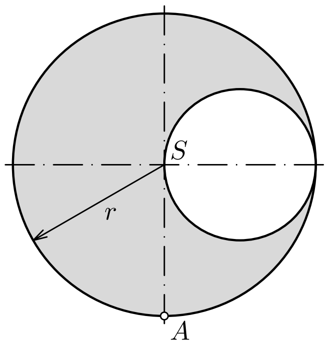
když jsme označili poloviční obvod trojúhelníku jako $s = \frac{a+b+c}{2}$.

V obr. 1 je vidět, že poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC je

$$\varrho = s-c = \frac{a+b-c}{2}.$$

Jsou-li čísla a, b, c sudá, resp. jedno z čísel a, b sudé a druhé liché a číslo c liché, je číslo ϱ celé, což jsme měli dokázat.

Úloha 28. Vodorovná homogenní kruhová deska o poloměru r, ze které byl vyříznut otvor o poloměru $0{,}5r$, je podepřena v bodě A (obr. 2).



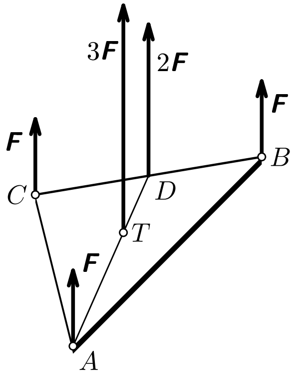
Obr. 2

Určete body B, C na obvodu desky, do kterých musíme umístit další dvě podpěry, mají-li být všechny zatíženy stejně. Počítejte i s možností, že některá podložka je na obvodu otvoru. Tření mezi deskou a podpěrami je malé; síly v bodech A, B, C proto mají svislý směr.

Úlohu řešte graficky i početně. (*Přemysl Šedivý*)

Autorské řešení:

Působí-li podpěry umístěné v bodech A, B, C na desku stejnými silami $\boldsymbol{F}_A = \boldsymbol{F}_B = \boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{F}$, můžeme síly $\boldsymbol{F}_B$ a $\boldsymbol{F}_C$ nahradit jedinou silou $\boldsymbol{F}_D = 2\boldsymbol{F}$ působící ve středu D úsečky BC (obr. 3). Působiště výslednice sil $\boldsymbol{F}_A$ a $\boldsymbol{F}_D$ dělí úsečku AD v poměru 2 : 1. Je to těžiště trojúhelníka ABC, které musí být totožné s těžištěm desky.



Obr. 3

Grafické řešení úlohy je na obr. 4. Kružnice k_2 rozdělí desku na dvě části o těžištích $T_1 \equiv S$ a $T_2 \equiv S_2$, jejichž obsahy jsou v poměru 2 : 1. Těžiště T celé desky je určeno vztahem

$$|ST| = \frac{|SS_2|}{3} = \frac{r}{6}.$$

Střed D úsečky BC leží na polopřímce AT, přičemž $|AD| = 1{,}5|AT|$. Jestliže bod B leží na kružnici k, musí bod C ležet na kružnici k' souměrně sdružené ke kružnici k podle bodu D, ale také na obvodu desky, tedy na kružnici k nebo k_1. Pokud bod C leží na kružnici k_1, musí bod B ležet na kružnici k_1' souměrně sdružené podle bodu D. Oba body B a C nemohou současně ležet na kružnici k_1, neboť bod D leží vně kružnice, a nemůže tedy být středem její tětivy.

Grafickým řešením dostáváme tři úsečky B_1C_1, B_2C_2 a B_3C_3.

Přesnou polohu hledaných bodů určíme početně. Vztažnou soustavu zvolíme podle obr. 4. Platí:

$$D\left[-\frac{r}{4}, \frac{r}{2}\right], \quad S'\left[-\frac{r}{2}, r\right], \quad S_1'\,[-r, r],$$

$$k\colon x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

$$k'\colon \left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + (y - r)^2 = r^2 \tag{2}$$

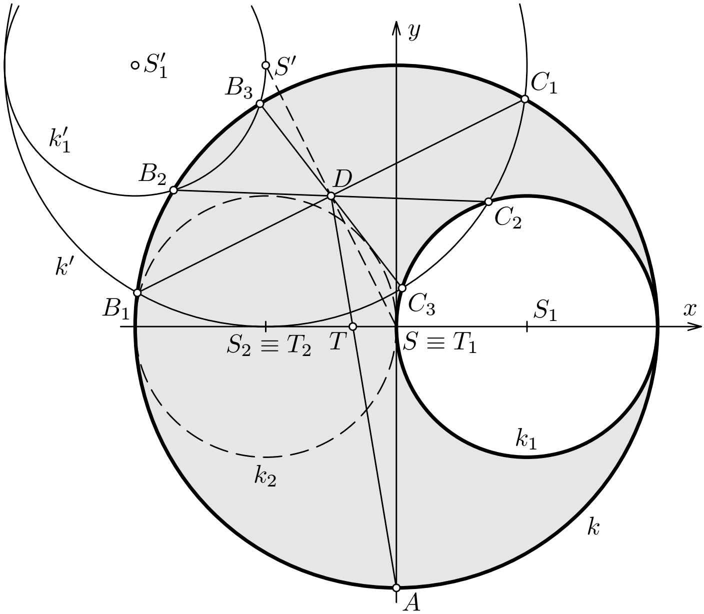
$$k_1\colon \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \tag{3}$$

Řešením soustavy rovnic (1), (2) dostaneme body B_1 a C_1. Řešením soustavy rovnic (2), (3) dostaneme body C_2 a C_3. Zbývající body B_2 a B_3 můžeme určit pomocí vztahu

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow B = 2D - C.$$

Po dosazení:

$B_1[-0{,}992r, 0{,}129r]$, $C_1[0{,}492r, 0{,}871r]$,
$B_2[-0{,}853r, 0{,}522r]$, $C_2[0{,}353r, 0{,}478r]$,
$B_3[-0{,}522r, 0{,}853r]$, $C_3[0{,}022r, 0{,}147r]$.



Obr. 4

Stav soutěže po 24 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 19 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 12 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Libor Drozdek (G, Holešov) – 9 bodů

Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 5 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Jiří Guth (G Jírovcova, České Budějovice) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Adam Láf (G Zborovská, Praha 5) – 5 bodů
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The Enlish College, Praha) – 5 bodů
Jakub Vančura (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod

* * * * *

NASYCENÉ PÁRY

Když teplota klesne pod bod
rosný,
vodní páry pocítí hlad
mocný.
Na kondenzačních jádrech se
zachytí
a za chvíli úplně se
nasytí.
Já bych ale nebyl
příliš rád,
kdybych se měl tím způsobem
stravovat!

*Emil Calda**)

*) *Úvod do obecné teorie prostoru,* Karolinum, Praha, 2003