PRO ŽÁKY ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Přirozená čísla ve čtvercové síti

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with a sum of n natural numbers which are selected by a given rule from square grid with numbers $1, 2, 3, \ldots, n^2$. The formula for this sum is derived.

O číslech uspořádaných do čtvercové tabulky existuje celá řada úloh. Jednu z nich si ukážeme.

Úloha

Do čtvercové tabulky skládající se z pěti řad a pěti sloupců jsou vepsána přirozená čísla od jedné do pětadvaceti takto:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}$$

Z těchto čísel vybereme několik pětic takových, že žádná z nich neobsahuje dvě čísla, která v této síti leží ve stejném řádku i sloupci, a pro každých takových pět čísel určíme jejich součet. Například:

$$\begin{gathered} 6 + 17 + 3 + 24 + 15 = 65 \\ 16 + 22 + 8 + 14 + 5 = 65 \\ 21 + 2 + 8 + 14 + 20 = 65 \\ 1 + 7 + 13 + 19 + 25 = 65 \end{gathered}$$

Na základě těchto ukázek můžeme vyslovit domněnku, že součet čísel v každé takto utvořené pětici je stejný a je roven číslu 65. Tuto domněnku bychom mohli dokázat tak, že prověříme všechny možné pětice, ale tímto způsobem postupovat nebudeme. Jednak kvůli tomu, že těchto možností není málo (o jejich počtu se zmíníme v závěru článku), jednak proto, že tento výsledek by platil pouze pro čtvercovou síť 5×5. Budeme uvažovat případ obecnější, a to čtvercovou tabulku tvořenou n řádky a n sloupci, do níž jsou vepsána všechna přirozená čísla od jedné do n^2 takto:

$$\begin{array}{rrrcr}
1 & 2 & 3 & \dots & n \\
n+1 & n+2 & n+3 & \dots & n+n=2n \\
2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 2n+n=3n \\
 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \\
(n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & (n-1)n+n=n\cdot n
\end{array}$$

Dokážeme, že všechny možné součty n čísel vybraných z této tabulky tak, že žádná dvě nejsou z téhož řádku ani sloupce, se navzájem rovnají.

Řešení úlohy

Všimněme si nejprve, že každý takový součet je utvořen z čísel tvaru $kn+m$, kde k nabývá hodnot 0, 1, 2, 3, …, $(n-1)$ a m je jedno z čísel 1, 2, 3, …, n. Protože z každého řádku je vybráno právě jedno číslo, je v tomto součtu právě jednou každé z čísel n, $2n$, $3n$, …, $(n-1)n$, a protože i z každého sloupce je vybráno jediné číslo, je v něm právě jednou také každé z čísel $1, 2, 3, \dots, n$. Vzhledem k tomu, že jiné sčítance tento součet neobsahuje, platí:

$$\begin{aligned}
S &= [n+2n+3n+\dots+(n-1)n]+[1+2+3+\dots+n]= \\
&= n[1+2+3+\dots+(n-1)]+[1+2+3+\dots+n]
\end{aligned}$$

Užitím známého vzorce pro součet prvních n přirozených čísel (viz např. [1])

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

dostaneme

$$S=\frac{n(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2},$$

neboli

$$S=\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}.$$

Tento výsledek znamená, že všechny součty n čísel vybraných z dané tabulky uvedeným způsobem se navzájem rovnají, což jsme chtěli dokázat; navíc jsme zjistili, že součet těchto n čísel je dán výrazem $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Počet výběrů sčítanců

Zbývá ještě zodpovědět otázku, kolika způsoby se dá z výše uvedené tabulky 5×5 vybrat pět čísel tak, že žádná dvě neleží v témže řádku ani sloupci. K odpovědi na tuto otázku si stačí uvědomit, že z prvního sloupce lze jedno číslo vybrat pěti způsoby a že z každého dalšího (po výběru ze sloupců předcházejících) lze jedno číslo vybrat postupně čtyřmi, třemi, dvěma a z posledního už jen jediným způsobem. Znamená to, že celkový počet způsobů, kterými se dá z tabulky 5×5 vybrat pětice daných vlastností, je roven číslu $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Podobným způsobem můžete zjistit, že počet všech způsobů, kterými lze z tabulky $n \times n$ vybrat n čísel splňujících uvedenou podmínku, je roven součinu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Literatura

[1] Calda, E.: Umíte sčítat přirozená čísla? *Rozhledy matematicko-fyzikální* **84**, č. 1 (2009), s. 48–52.

* * * * *
* * *
*

Instrukce k 54. ročníku FO EF

Zatímco Fyzikální olympiáda jako předmětová soutěž pro žáky středních škol vstoupila do 54. ročníku své existence, pro soutěžící z řad žáků základních škol a z nižších ročníků víceletých gymnázií se letos bude konat již po padesáté. Soutěž byla nejprve rozšířena na žáky devátých ročníků základních škol (kategorie E), později přistoupila kategorie F pro žáky 8. ročníků a před 25 lety vznikla zatím poslední kategorie G, určená žákům 7. ročníků.

V našem článku vám nabízíme úlohy pro kategorie E a F. Požádejte svého učitele fyziky, aby vám vybral takové úlohy, které budou vycházet z učiva, jež jste již pochopili, máte ho dobře procvičené, a tedy máte naději, že při řešení úloh budete úspěšní. Po ukončení školního (domácího) kola můžete nalézt správné výsledky na internetu – na webové stránce `http://fyzikalniolympiada.cz`.

Úlohy 1. kola 54. ročníku Fyzikální olympiády kategorií E a F najdete na str. 33.