Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

# Tři nerovnosti v pravoúhlém trojúhelníku

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 87 (2012), No. 2, 29–32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146470

# Tři nerovnosti v pravoúhlém trojúhelníku

*Emil Calda, MFF UK Praha*

**Abstract.** The article presents proofs of three inequalities among lengths of various segments in any right-angled triangle.

V tomto článku se můžete seznámit se třemi nerovnostmi v pravoúhlém trojúhelníku, které se týkají jeho stran, výšky na přeponu a poloměrů opsané a vepsané kružnice [1]. Poznamenejme, že uvedené prvky pravoúhlého trojúhelníku $ABC$ budeme označovat obvyklým způsobem: $a$, $b$ délky odvěsen, $c$ délka přepony, $v$ výška na přeponu, $R$, $r$ poloměry opsané a vepsané kružnice (v tomto pořadí) a $S$ jeho obsah.

## První nerovnost

*V každém pravoúhlém trojúhelníku je součet délek jeho odvěsen menší než součet velikosti výšky na přeponu a průměru opsané kružnice, tj.*

$$a + b < 2R + v.$$

Důkaz je jednoduchý, uvědomíme-li si, že v pravoúhlém trojúhelníku platí

$$a^2 + b^2 = c^2, \qquad S = \frac{cv}{2} = \frac{ab}{2}, \qquad c = 2R.$$

Užitím vztahu $2cv = 2ab$, který plyne z rovností pro obsah $S$, dostaneme

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2cv,$$

neboli

$$(a + b)^2 = (c + v)^2 - v^2$$

a po odmocnění

$$a + b = \sqrt{(c + v)^2 - v^2}.$$

Vzhledem k tomu, že je

$$\sqrt{(c + v)^2 - v^2} < \sqrt{(c + v)^2} = c + v,$$

platí
$$a+b<c+v,$$
neboli
$$a+b<2R+v,$$
což jsme měli dokázat.

### Druhá nerovnost

*V každém pravoúhlém trojúhelníku je součet poloměrů jeho opsané a vepsané kružnice větší nebo roven druhé odmocnině ze součinu délek jeho odvěsen, tj.*
$$R+r \geq \sqrt{ab}.$$

K důkazu použijeme vzorec pro obsah $S$ libovolného trojúhelníku $ABC$ se stranami délek $a$, $b$, $c$ a poloměrem $r$ kružnice vepsané:
$$S=\frac{r(a+b+c)}{2}$$
Tento vztah si snadno zdůvodníte, načrtnete-li si libovolný trojúhelník $ABC$ se středem $O$ vepsané kružnice; jeho obsah $S$ je roven součtu obsahů trojúhelníků $ABO$, $BCO$ a $ACO$, takže platí
$$S=\frac{rc}{2}+\frac{ra}{2}+\frac{rb}{2}=\frac{r(a+b+c)}{2}.$$
Vypočteme-li odtud
$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{ab}{a+b+c}$$
a přihlédneme-li ještě k tomu, že v pravoúhlém trojúhelníku je $R=\frac{c}{2}$ a $c^2=a^2+b^2$, pro součet $R+r$ dostaneme
$$\begin{aligned}R+r=\frac{c}{2}+\frac{ab}{a+b+c}&=\frac{ac+bc+c^2+2ab}{2(a+b+c)}=\\ &=\frac{(a+b)c+a^2+b^2+2ab}{2(a+b+c)}=\frac{(a+b)c+(a+b)^2}{2(a+b+c)}=\\ &=\frac{(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)}=\frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

K dokončení důkazu zbývá ukázat, že pro délky $a$, $b$ odvěsen platí

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Vyjdeme z nerovnosti $(a-b)^2 \geq 0$, která platí pro libovolná čísla $a$, $b$, a postupnými úpravami dostaneme:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

Odtud pro nezáporná čísla $a$, $b$ plyne

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Protože délky $a$, $b$ odvěsen nezáporná čísla jsou, je tím nerovnost

$$R + r \geq \sqrt{ab}$$

dokázána.

*Poznámka:* Vzhledem k tomu, že výraz $\frac{a+b}{2}$ je aritmetický průměr čísel $a$, $b$ a výraz $\sqrt{ab}$ jejich průměr geometrický, dá se poslední nerovnost formulovat takto: *Aritmetický průměr libovolných dvou nezáporných čísel je větší nebo roven jejich průměru geometrickému.*

## Třetí nerovnost

*V každém pravoúhlém trojúhelníku pro poloměr $r$ vepsané kružnice a velikost $v$ jeho výšky na přeponu platí*

$$\frac{2v}{5} < r < \frac{v}{2}.$$

V rámci důkazu vyjádříme obsah $S$ pravoúhlého trojúhelníku dvěma způsoby a dostaneme vztah

$$\frac{r(a+b+c)}{2} = \frac{cv}{2},$$

odkud vypočteme

$$\frac{r}{v} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Protože $a + b > c$, je

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+c} = \frac{1}{2},$$

takže platí

$$\frac{r}{v} < \frac{1}{2}.$$

K odvození vztahu

$$\frac{2v}{5} < r$$

použijeme nerovnost

$$a + b \leq c\sqrt{2},$$

kterou dokážeme následovně. Vyjdeme z nerovnosti $a^2 + b^2 \geq 2ab$, o níž už víme, že platí pro libovolná čísla $a$, $b$, a k oběma jejím stranám přičteme stejný výraz, k levé straně $c^2$, k pravé $a^2 + b^2$. Dostaneme tak

$$(a^2 + b^2) + c^2 \geq 2ab + (a^2 + b^2),$$

neboli

$$2c^2 \geq (a + b)^2,$$

odkud pro kladná čísla $a$, $b$, $c$ máme

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

Pro poměr $\frac{r}{v}$ tak dostáváme

$$\frac{r}{v} = \frac{c}{a+b+c} \geq \frac{c}{c\sqrt{2}+c} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 > 0{,}4 = \frac{2}{5},$$

takže vskutku platí

$$r > \frac{2v}{5},$$

což jsme měli dokázat.

## Literatura

[1] Sivašinskij, I. Ch.: *Něravenstva v zadačach.* Nauka, Moskva, 1967.