Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 1, 58–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146462

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní tedy předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. května 2012* na adresu redakce.

Úloha 25. Určete všechna přirozená čísla n, pro která je

$$\sqrt{n-2012}+\sqrt{n+2012}$$

číslo celé. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 26. Na vodorovné rovině leží tři sněhové koule, z nichž má být postaven sněhulák. Největší koule má poloměr r_1, prostřední $r_2 = kr_1$ a nejmenší $r_3 = kr_2$. Koule jsou homogenní, hustota sněhu je u všech koulí stejná. Největší koule má hmotnost m_1. Určete

a) minimální práci nutnou k postavení sněhuláka,
b) výšku těžiště sněhuláka nad vodorovnou rovinou.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnotu $k = 0{,}75$. (*Josef Jírů*)

Řešení úloh z čísla 3/2011

Úloha 21. Dokažte, že z posloupnosti mocnin $2^7, 2^8, \ldots, 2^{2011}$ zapsaných v desítkovém zápisu lze vybrat aspoň dvě skupiny po 21 číslech takových, že v každé skupině končí všechna čísla stejným trojčíslím a přitom v jiné skupině jiným trojčíslím. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Všechna čísla 2^7, 2^8, $\ldots$, 2^{2011} jsou dělitelná osmi a nekončí nulou, je proto možných 100 různých konečných trojčíslí, která rozhodují o dělitelnosti osmi: 128, 256, 512, 024, 048, 096, 192, ... Žádné dvě za sebou následující mocniny dvojky nekončí stejným trojčíslím. Ta tedy budou za sebou následovat v cyklech. Perioda je aspoň čtyřčlenná, o čemž svědčí poslední číslice, které postupně jsou 8, 6, 2, 4.

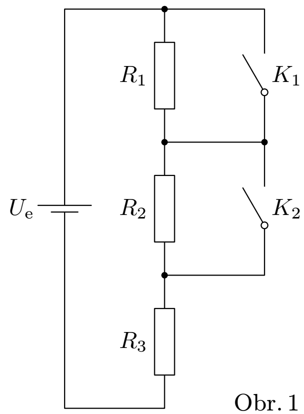
Mezi 101 prvními čísly 2^7, 2^8, $\ldots$, 2^{107} existují podle Dirichletova principu aspoň dvě se stejným posledním trojčíslím. Díky periodicitě posledního trojčíslí se toto trojčíslí objeví nejpozději po dalším stu mocnin dvojky atd. Tedy objeví se nejméně 21krát.

Díky periodicitě se mezi 102 prvními čísly 2^7, 2^8, $\ldots$, 2^{108} ale objeví ještě další trojčíslí stejné u aspoň dvou čísel. Bylo-li totiž stejné trojčíslí u mocnin 2^k, 2^l, je stejné trojčíslí také u mocnin 2^{k+1}, 2^{l+1}, kde $7 \leq k$, $l \leq 107$. Opět díky periodicitě se toto další trojčíslí objeví mezi dalším stem čísel atd., tedy objeví se nejméně 21krát.

Poznámka: Skupin po 21 číslech takových, že v každé skupině končí všechna čísla stejným trojčíslím a v různých skupinách různým trojčíslím, je právě pět.

Úloha 22. Tři rezistory jsou zapojeny podle schématu na obr. 1 ke zdroji stálého napětí se zanedbatelným vnitřním odporem. Jsou-li spínače K_1 a K_2 rozepnuty, mají rezistory výkony $P_1 = 1$ W, $P_2 = 2$ W, $P_3 = 3$ W. Jaký bude výkon P_4 spotřebiče 3, budou-li spínače K_1 i K_2 sepnuty? Jaké budou výkony P_5 spotřebiče 2 a P_6 spotřebiče 3, bude-li sepnut pouze spínač K_1?

(*Jan Thomas*)



Obr. 1

Řešení: Jsou-li spínače rozpojeny, prochází všemi rezistory stejný proud. Pak platí

$$P_1 : P_2 : P_3 = R_1 : R_2 : R_3.$$

Celkový výkon je roven součtu výkonů:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{U_e^2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{1}$$

Při sepnutí obou spínačů je $P_4 = U_e^2/R_3$. Dosazením z (1) dostaneme

$$
\begin{aligned}
P_4 &= \frac{(P_1 + P_2 + P_3) \cdot (R_1 + R_2 + R_3)}{R_3} = \\
&= (P_1 + P_2 + P_3) \cdot \left(\frac{R_1}{R_3} + \frac{R_2}{R_3} + 1 \right) = \\
&= (P_1 + P_2 + P_3) \cdot \left(\frac{P_1}{P_3} + \frac{P_2}{P_3} + 1 \right) = \\
&= \frac{(P_1 + P_2 + P_3)^2}{P_3} = 12\ \mathrm{W}.
\end{aligned}
$$

Bude-li sepnut pouze spínač K_1, platí

$$U_e^2 = (P_5 + P_6) \cdot (R_2 + R_3) = (P_1 + P_2 + P_3) \cdot (R_1 + R_2 + R_3),$$

z čehož

$$
\begin{aligned}
P_5 + P_6 &= \frac{(P_1 + P_2 + P_3) \cdot (R_1 + R_2 + R_3)}{R_2 + R_3} = \\
&= (P_1 + P_2 + P_3) \cdot \left(\frac{R_1}{R_2 + R_3} + 1 \right) = \\
&= (P_1 + P_2 + P_3) \cdot \left(\frac{1}{\frac{P_2}{P_1} + \frac{P_3}{P_1}} + 1 \right) = \\
&= \frac{(P_1 + P_2 + P_3)^2}{P_2 + P_3} = 7{,}2\ \mathrm{W}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\frac{P_5}{P_6} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{P_2}{P_3} = \frac{2}{3}, \qquad (3)$$

dostaneme z rovnic (2) a (3) $P_5 = 2{,}88\ \mathrm{W}$, $P_6 = 4{,}32\ \mathrm{W}$.

Stav soutěže po 22 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (Gymnázium Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů

Michal Řepík (PedF UK, Praha) – 9 bodů