Rozhledy matematicko-fyzikální

53. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 3, 19–37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146430

53. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.)

KATEGORIE A

1. Srážka částic

Částice α (jádro helia) byla urychlena elektrickým polem z klidu na rychlost o velikosti $v \ll c$ a pohybuje se přímočaře k volnému protonu, který je v klidu. Proton má elektrický náboj $+e$ a hmotnost m, elektrický náboj částice α je $+2e$ a její hmotnost s dostatečnou přesností $4m$. Částice na sebe působí pouze elektrickou silou. Celý děj probíhá ve vakuu.

a) Určete elektrické napětí U, kterým byla částice α urychlena.
b) Určete velikosti u_1, u_2 konečných rychlostí po vzájemné interakci.
c) Určete minimální vzdálenost r_m, na kterou se částice během vzájemného působení přiblíží.

Elektrická potenciální energie bodových nábojů Q_1, Q_2 ve vzájemné vzdálenosti r je při volbě nulové energie v nekonečné vzdálenosti nábojů rovna

$$E_\mathrm{p} = \frac{kQ_1Q_2}{r}.$$

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty: $k = 8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$, $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$, $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$, $v = 2{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

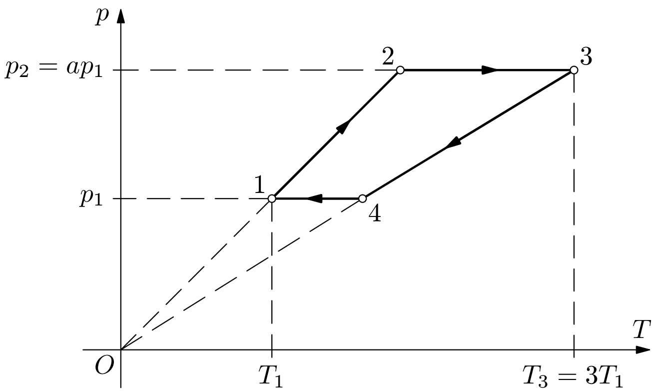
2. Kruhový děj

Na obr. 1 je znázorněn kruhový děj v ideálním plynu s jednoatomovými molekulami o látkovám množství n. Nejmenší teplota, které plyn v průběhu děje dosáhne, je T_1 při tlaku p_1. Největší teplota $3T_1$ nastane při tlaku $p_2 = ap_1$, kde $1 < a < 3$.

a) Charakterizujte jednotlivé děje 1–2, 2–3, 3–4, 4–1, ze kterých se kruhový děj skládá, a překreslete tento děj do p-V diagramu.
b) Odvoďte obecně vztah pro výpočet práce vykonané plynem za jeden cyklus kruhového děje (pomocí p_1, V_1, a).

c) Odvoďte obecně vztah pro výpočet účinnosti kruhového děje jako funkci proměnné a.
d) Určete maximální účinnost kruhového děje a pro které a toto nastane.

Vnitřní energie plynu s jednoatomovými molekulami je $U = \frac{3}{2}nRT$.



Obr. 1

3. Bóje

Na hladině vodní nádrže plove bóje vyrobená jako dutá ocelová koule tak, že výška kulového vrchlíku vyčnívajícího nad hladinu je $v = 11$ cm. Jestliže bóji jemně zatlačíme do vody a uvolníme, bude konat malé kmity ve svislém směru s periodou $T = 1{,}05$ s.

a) Na základě změřených hodnot určete vnější poloměr koule. Řešte obecně i číselně.
b) Vypočítejte hmotnost koule a tloušťku její stěny.

Při řešení úlohy předpokládejte, že kmity koule na hladině jsou netlumené.

Hustota vody $\varrho_\mathrm{v} = 1{,}00\cdot 10^3$ kg·m^{-3}, hustota oceli $\varrho = 7{,}8\cdot 10^3$ kg·m^{-3}.

Objem kulové úseče s výškou v, která vznikne z koule o poloměru R, a objem zbytku koule jsou

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi v^2(3R - v), \qquad V_2 = \frac{1}{3}\pi(2R - v)^2(R + v).$$

4. Štěpení uranu

Přírodní čistý uran tvoří směs izotopů ^{235}U a ^{238}U, přičemž $p_1 = 0{,}72$ % hmotnosti připadá na ^{235}U a zbytek na ^{238}U. Poločas rozpadu ^{235}U je $T_1 = 7{,}038 \cdot 10^8$ let, poločas rozpadu ^{238}U je $T_2 = 4{,}468 \cdot 10^9$ let.

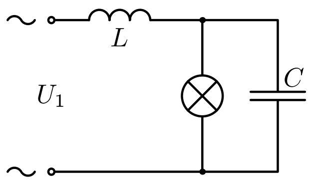
a) Jaká je aktivita vzorku přírodního uranu o hmotnosti $m = 1$ kg?
b) V gabunském Oklo došlo před asi 1,9 mld. let k zapálení přírodního reaktoru. Jaké bylo tehdy procentuální hmotnostní zastoupení ^{235}U v přírodním čistém uranu?

Při rozštěpení jádra ^{235}U pomalými neutrony může vzniknout např. jádro $^{143}_{56}$Ba s klidovou hmotností $m_{\mathrm{Ba}} = 142{,}920\,62\ m_{\mathrm{u}}$ a jádro $^{90}_{36}$Kr s klidovou hmotností $m_{\mathrm{Kr}} = 89{,}919\,524\ m_{\mathrm{u}}$.

c) Napište rovnici reakce a vypočítejte energii reakce. Klidová hmotnost neutronu $m_{\mathrm{n}} = 1{,}008\,664\,9\ m_{\mathrm{u}}$, klidová hmotnost jádra ^{235}U je $m_{\mathrm{U}} = 235{,}043\,9\ m_{\mathrm{u}}$.
d) Štěpení uranu v přírodním reaktoru probíhalo asi 500 000 let a vyhořelo přitom asi 5 tun ^{235}U. Jaká energie se přitom uvolnila, předpokládáme-li, že se při rozštěpení jednoho jádra uvolní průměrně energie $E_1 = 200$ MeV?
Porovnejte tuto energii s průměrnou denní spotřebou jednoho člověka (veškerou energií spotřebovanou civilizací za jeden den v průmyslu, v dopravě, při vytápění atd. vydělenou počtem obyvatel planety), která se odhaduje na 0,36 GJ.

5. Zvětšení napětí

Žárovku se jmenovitými hodnotami napětí $U = 24$ V a proudu $I = 0{,}3$ A potřebujeme napájet ze zdroje střídavého proudu o efektivní hodnotě svorkového napětí $U_1 = 12$ V a frekvenci 50 Hz. Použijeme k tomu obvod zapojený podle obr. 2. Kondenzátor připojený paralelně k žárovce má dostatečně velkou kapacitu $C = 100$ μF.



Obr. 2

a) Jakou indukčnost L musí mít cívka, aby napětí na žárovce mělo jmenovitou hodnotu?
b) Jaké bude fázové posunutí napětí na žárovce oproti svorkovému napětí zdroje?

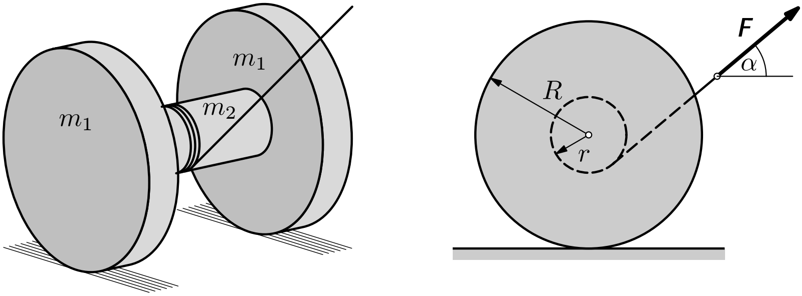
Kondenzátor a cívku považujte za ideální, vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný.

6. *Praktická úloha*:
Měření ohniskové vzdálenosti čočky Besselovou metodou
Předmět (např. svíčku) a stínítko postavíme kolmo na optickou osu tenké spojky tak, aby jejich vzájemná vzdálenost byla l. Budeme-li pohybovat čočkou po optické ose v prostoru mezi předmětem a stínítkem, vytvoří se za určitých podmínek ostrý obraz při dvou polohách čočky.
a) Stanovte, jakou podmínku musí splňovat poměr $\frac{l}{f}$, aby toto bylo splněno.
b) Odvoďte vztahy pro výpočet poloh čočky a_1, a_2, aby oba obrazy byly ostré.
c) Označme $d = |a_1 - a_2|$. Dokažte, že pro ohniskovou vzdálenost čočky platí
$$f = \frac{l^2 - d^2}{4l}.$$
d) Proveďte vlastní měření l a d pro danou tenkou spojnou čočku. Pak proveďte výpočet ohniskové vzdálenosti čočky. Měření proveďte pro pět různých vzdáleností l, k nimž pak odměříte příslušná d.

7. Činka
Na vodorovné rovině leží malá činka, která se skládá ze dvou válců, každý o hmotnosti m_1 a poloměru R a spojovací tyče tvaru válce o hmotnosti m_2 a poloměru r. Uprostřed činky je namotáno tenké pevné vlákno zanedbatelné hmotnosti, na jehož konci působí síla $\boldsymbol{F}$; vlákno svírá s vodorovnou rovinou úhel α (obr. 3). Součinitel smykového tření mezi činkou a vodorovnou rovinou je f.
a) Určete úhel α_0, při kterém se bude činka smýkat rovnoměrným pohybem po vodorovné rovině bez otáčení, a velikost F_0 síly, kterou přitom musíme na vlákno působit.
b) Jaká může být nejvýše velikost síly, kterou působíme na vlákno, aby se činka odvalovala po vodorovné rovině bez smýkání, jestliže sklon

vlákna je (1) $\alpha_1 < \alpha_0$, (2) $\alpha_2 > \alpha_0$? S jakým zrychlením se přitom bude pohybovat střed činky?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $m_1 = 1{,}00$ kg, $m_2 = 0{,}50$ kg, $r = 1{,}50$ cm, $R = 5{,}00$ cm, $f = 0{,}25$, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 80°$.



Obr. 3

V obecném řešení označte celkovou hmotnost činky m a moment setrvačnosti činky vzhledem k ose otáčení J.

KATEGORIE B

1. Váleček na rtuti

Na hladině rtuti v kádince plave kovový váleček, jehož výška je větší než jeho průměr, tak, že osa válečku je rovnoběžná s hladinou. Nad hladinu vyčnívá 37 % jeho objemu.

a) Hustota rtuti je $\varrho_1 = 13\,600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Jaká je hustota ϱ materiálu válečku? Jaká část poloměru válečku vyčnívá nad hladinu rtuti?

b) Jaká část poloměru válečku bude vyčnívat nad hladinu rtuti, když na ni nalijeme vodu o hustotě $\varrho_2 = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ tak, aby byl váleček zcela pod hladinou vody?

Poznámka: Úloha vede k rovnicím, které je nutno řešit numerickými metodami.

2. Družice na oběžné dráze

Družice se nachází na kruhové oběžné dráze ve výšce $h_1 = 300$ km nad povrchem Země.

a) Jaká je velikost v_0 její rychlosti a oběžná doba T_0?
b) Na jakou hodnotu v_1 je třeba snížit velikost rychlosti družice pomocí malého raketového motoru, aby družice přešla na eliptickou dráhu s minimální výškou $h_2 = 250$ km nad zemským povrchem?
c) Jak se změní oběžná doba družice?

Úlohu řešte obecně a pak pro dané hodnoty h_1 a h_2. Poloměr zemského povrchu $R = 6\,370$ km, gravitační konstanta $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}, hmotnost Země $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

3. Tři kalorimetry

Do kalorimetru se zanedbatelnou tepelnou kapacitou, ve kterém je nalita voda o hmotnosti M a teplotě t_v, vhodíme kousky ledu o celkové hmotnosti m a teplotě t_L.

a) Proveďte úplnou diskusi, jaký rovnovážný stav se v kalorimetru ustálí v závislosti na hodnotách uvedených veličin.

Máme tři stejné kalorimetry, jejichž tepelná kapacita je zanedbatelná. Do každého z těchto kalorimetrů nalijeme vodu o hmotnosti M a stejné teplotě t_v. Pak do každého kalorimetru nasypeme kousky ledu opět o stejné teplotě t_L, a to tak, že do prvního kalorimetru nasypeme kousky ledu o celkové hmotnosti $m_1 = M$, do druhého kousky ledu o celkové hmotnosti $m_2 = \frac{M}{2}$ a do třetího $m_3 = 2M$. Po dosažení rovnovážného stavu se hmotnost ledu v prvním kalorimetru nezmění, ve druhém bude $m_2' = 0{,}9m_2$ ledu, hmotnost ledu m_3' ve třetím kalorimetru neznáme.

b) Z uvedených údajů určete teploty t_v a t_L.
c) Určete, jaký rovnovážný stav se ustálí ve třetím kalorimetru.

Měrná tepelná kapacita vody je $c_\mathrm{v} = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, měrná tepelná kapacita ledu je $c_\mathrm{L} = 2\,100\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, měrné skupenské teplo tání ledu je $l_\mathrm{t} = 334\,000\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$, teplota tání ledu je $t_\mathrm{t} = 0\,°\mathrm{C}$.

Tepelnou výměnu s okolím zanedbejte.

4. Hrátky s kondenzátory

Máme dva stejné deskové kondenzátory s kapacitou $C = 100$ pF, jejichž dielektrikem je vzduch, a zdroj vysokého napětí s elektromotorickým napětím $U_\mathrm{e} = 10$ kV.

a) Kondenzátory zapojíme sériově, připojíme ke zdroji napětí a zdroj odpojíme. Jak se změní intenzita elektrického pole mezi deskami jednoho z kondenzátorů, jestliže vzdálenost mezi jeho deskami pomalu zvětšíme 3krát? Jakou práci přitom musíme vykonat?

b) Kondenzátory zapojíme paralelně, připojíme ke zdroji napětí a zdroj odpojíme. Jak se změní intenzita elektrického pole mezi deskami jednoho z kondenzátorů, jestliže vzdálenost mezi jeho deskami pomalu zvětšíme 3krát? Jakou práci přitom musíme vykonat?
c) Jak se změní výsledky úloh a) a b), jestliže zdroj po nabití baterie kondenzátorů necháme připojen?

Poznámka: Jestliže změnu vzdálenosti mezi deskami provádíme dostatečně pomalu, můžeme zanedbat ztráty způsobené zahřátím vodičů Jouleovým teplem. (Pro uvolněné teplo platí: $Q_\mathrm{j} = RI^2t = R\frac{(\Delta q)^2}{t}$.)

5. Dvě baterie

Máme dvě baterie, každá se skládá z pěti článků zapojených do série. Elektromotorické napětí každého článku je $U_\mathrm{e} = 1{,}2$ V. Druhá baterie má jeden článek vadný, jeho vnitřní odpor je $R_\mathrm{i}' = 4{,}0\ \Omega$. Každý ze zbývajících článků má vnitřní odpor $R_\mathrm{i} = 0{,}2\ \Omega$. K baterii připojíme rezistor s odporem $R = 6{,}0\ \Omega$.

a) Určete příkon P_1 rezistoru a účinnost η_1, jestliže rezistor připojíme k první baterii.
b) Určete příkon P_2 rezistoru a účinnost η_2, jestliže rezistor připojíme k druhé baterii.
c) Určete příkon P_2' rezistoru a účinnost η_2', jestliže rezistor připojíme k druhé baterii a vadný článek vodičem přemostíme.
d) Určete odpor rezistoru, na němž po připojení k druhé baterii dostaneme větší příkon při přemostění vadného článku baterie než bez přemostění.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

6. *Praktická úloha*:
Frekvenční charakteristiky indukčnosti a rezistance cívky

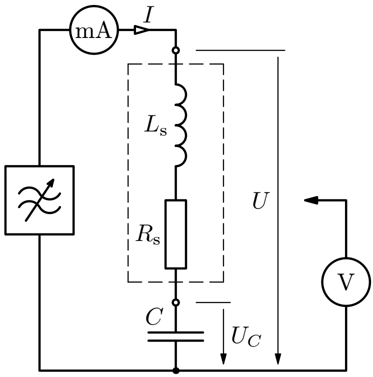
Reálná cívka má v nízkofrekvenčním obvodu s harmonickým střídavým proudem stejné vlastnosti jako sériové spojení ideální cívky o indukčnosti L_s a ideálního rezistoru o rezistanci R_s. Reálný kondenzátor se v nízkofrekvenčním obvodu chová téměř jako ideální kondenzátor o kapacitě C. Spojíme-li cívku s kondenzátorem do série, dostaneme sériový rezonanční jednobran, jehož připojením k nízkofrekvenčnímu generátoru vznikne rezonanční obvod (obr. 1).

Při rezonanční frekvenci f_r prochází obvodem největší proud I_r a na rezonančním jednobranu naměříme nejmenší napětí U_r. (Vzniká velký úbytek napětí na vnitřním odporu generátoru.) Na kondenzátoru naměříme při rezonanci napětí $U_{C\mathrm{r}} > U_\mathrm{r}$. Přitom platí vztahy:

$$f_\mathrm{r} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_\mathrm{s}C}}, \qquad L_\mathrm{s} = \frac{1}{4\pi^2 f_\mathrm{r}^2 C}, \qquad Z_\mathrm{r} = \frac{U_\mathrm{r}}{I_\mathrm{r}} = R_\mathrm{s},$$

$$\frac{U_{Cr}}{U_\mathrm{r}} = \frac{\omega_\mathrm{r} L_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}} = Q,$$

kde Z_r je rezonanční impedance a Q činitel jakosti obvodu. Rezonanční frekvenci obvodu můžeme měnit zapojováním kondenzátorů s různou kapacitou.



Obr. 1

Úkoly:

a) Veličiny L_s, R_s, které charakterizují cívku, nejsou konstantní, ale závisí na frekvenci. Určete tuto závislost u cívky 1200 závitů z rozkladného transformátoru s rovným jádrem.

b) Ověřte, že při rezonanci platí

$$\frac{U_{C\mathrm{r}}}{U_\mathrm{r}} = \frac{\omega_\mathrm{r} L_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}.$$

Provedení úlohy:

Sestavte obvod podle obr. 1 a na generátoru nastavte rezonanční frekvenci, při které celkové napětí rezonančního jednobranu dosáhne výrazného minima U_r a proud naopak bude maximální. (Pro snadnější nalezení rezonance je vhodné, aby voltmetr byl v ručkovém provedení.) Změřte rezonanční proud I_r a napětí na kondenzátoru $U_{C\mathrm{r}}$. Měření opakujte pro různé kapacity kondenzátoru v rozsahu 10 nF až 10 μF. Kapacity pokud možno přeměřte, protože se vyrábějí s velkou tolerancí. Pro jednotlivé rezonanční frekvence vypočítejte L_s, R_s, $Q_1 = \frac{\omega_\mathrm{r} L_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}$ a $Q_2 = \frac{U_{C\mathrm{r}}}{U_\mathrm{r}}$. Naměřené a vypočítané hodnoty zapište do tabulky:

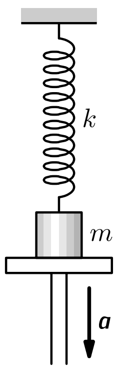
C/nF				
f_r/kHz				
U_r/V				
I_r/mA				
$U_{C\mathrm{r}}$/V				
L_s/H				
R_s/Ω				
Q_1				
Q_2				

Ověřte, že $Q_1 = Q_2 = Q$, a nakreslete grafy závislosti veličin L_s, R_s a Q na frekvenci. Je vhodné volit na vodorovné ose logaritmickou stupnici. Průběhy grafů popište.

7. Těleso na podložce

Na vodorovné podložce leží těleso hmotnosti m, připevněné ke svisle zavěšené pružině o tuhosti k. Pružina není na počátku deformována. Podložka se začne pohybovat směrem dolů se zrychlením $\boldsymbol{a}$ (obr. 2). Určete:

a) za jakou dobu t se těleso oddělí od podložky,
b) o jakou největší délku y_0 se pružina prodlouží,
c) jaká bude amplituda y_m vzniklých kmitů,
d) jaká bude největší rychlost v_m kmitajícího závaží.



Obr. 2

KATEGORIE C

1. Dva motocyklisté

Při tréninku na závody motocyklů jede motocyklista A stálou rychlostí $v_A = 120\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a míjí výjezd z depa. Když je od výjezdu z depa vzdálen $s_0 = 100$ m, vyjíždí z depa motocyklista B s počáteční rychlostí $v_1 = 30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a se stálým zrychlením a, který za dobu $t_1 = 12$ s dosáhne rychlosti $v_B = 140\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a dále se pohybuje touto rychlostí.

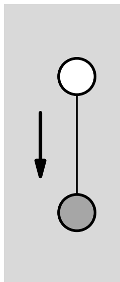
a) Určete, kdy motocyklista B dosáhne stejné rychlosti, jakou má motocyklista A.

b) Určete čas, kdy se motocyklisté ocitnou na dráze vedle sebe, a vzdálenost od výjezdu z depa, ve které se tak stane.

c) Jak se změní výsledky části b), vyjede-li motocyklista B na trať ve chvíli, kdy je motocyklista A ještě ve vzdálenosti s_0 před výjezdem z depa?

2. Dvě kuličky

Dvě kuličky, dřevěná o hustotě $\varrho_1 = 600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a hliníková o hustotě $\varrho_2 = 2\,700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a stejném poloměru $r = 1{,}5$ cm, jsou spojeny pevnou tenkou nití a vloženy do vody v hlubokém bazénu. Hliníková kulička klesá ke dnu a táhne za sebou kuličku dřevěnou (obr. 1).



Obr. 1

a) Jakou rychlostí $\boldsymbol{v}$ budou klesat kuličky ke dnu, když se jejich pohyb ustálí? Jakou silou $\boldsymbol{T}$ bude napínána nit mezi kuličkami během jejich rovnoměrného klesání ke dnu? Při klesání kuliček ve vodě můžeme předpokládat platnost Newtonova vztahu pro velikost odporové síly

$$F = \frac{1}{2} C S \varrho v^2.$$

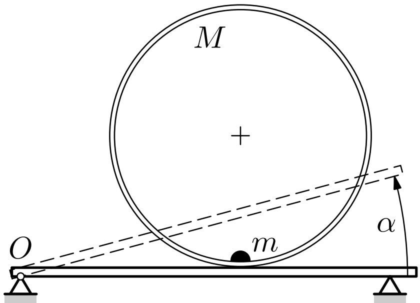
b) Jakou silou $\boldsymbol{T}_1$ bude napínána nit, když hliníková kulička klesne ke dnu?

c) Jaký poloměr r_1 by musela mít dřevěná kulička, aby se soustava ve vodě vznášela? Jakou silou $\boldsymbol{T}_2$ bude napínána nit v tomto případě?

Hustota vody $\varrho = 1\ 000\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Součinitel odporu pro kouli je $C = 0{,}48$. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

3. Na šikmé ploše

Na obvodu tenké pevné obruče o hmotnosti M a poloměru r je z vnitřní strany připevněno malé tělísko o hmotnosti m. Obruč stojí na vodorovné desce, kterou začneme velmi pomalu naklánět okolo osy rovnoběžné s rotační osou obruče (obr. 2).



Obr. 2

a) Jak se bude v závislosti na sklonu α desky měnit odchylka β spojnice středu obruče s tělískem od vodorovné roviny?
b) Jak se v závislosti na úhlu α bude měnit poloha bodu, ve kterém se obruč dotýká desky?
c) Do jaké maximální hodnoty můžeme zvětšovat úhel α, aniž by obruč opustila desku? Součinitel smykového tření mezi obručí a deskou je f.
d) Úlohu řešte nejprve obecně. Pak zjistěte, jaká situace nastane v okamžiku, kdy úhel α dosáhne hodnoty 5°, jestliže $M = 1{,}00$ kg, $m = 200$ g, $r = 25$ cm, $f = 0{,}20$ a počáteční vzdálenost bodu dotyku obruče od dolního okraje desky je $d_0 = 15$ cm.

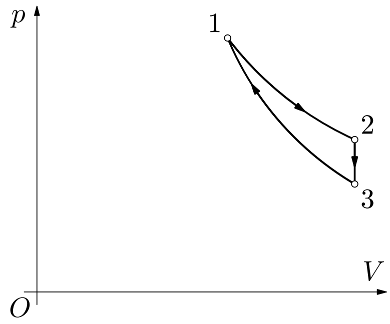
4. Kruhový děj

Ideální tepelný stroj, jehož pracovní látkou je 1 mol ideálního plynu s jednoatomovými molekulami (Poissonova konstanta $\varkappa = \frac{5}{3}$), pracuje v cyklu tří na sebe navazujících dějů:

[1 → 2] – plyn se izotermicky rozepne z původního objemu $V_1 = 30{,}0$ l a tlaku $p_1 = 200$ kPa na objem $V_2 = 50{,}0$ l a tlak p_2.

[2 → 3] – plyn izochoricky ochladíme.

[3 → 1] – plyn adiabaticky stlačíme do původního stavu.



Obr. 3

a) Určete tlaky plynu a teploty ve stupních Celsia odpovídající stavům 1, 2, 3.
b) Určete práci vykonanou ideálním plynem v průběhu jednoho cyklu a teplo, které je třeba dodat plynu v průběhu jednoho cyklu.
c) Určete účinnost tohoto kruhového děje.

Část a) a b) řešte nejprve obecně (své řešení vyjádřete vždy pouze pomocí zadaných hodnot), potom pro zadané hodnoty. Vnitřní energie ideálního plynu s jednoatomovými molekulami je $U = \frac{3}{2}nRT$. Práce vykonaná plynem při izotermickém rozepnutí z objemu V_1 na objem V_2 je $W' = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

5. Hasičská stříkačka

Hasič stříká vodu ze stříkačky, která je připojená hadicí k válcové cisterně na hasičském voze. Voda se do hadice vhání čerpadlem připevněným k cisterně. Průměr cisterny $D = 2{,}5$ m, její délka $L = 3{,}5$ m, vnitřní průměr hadice $d_1 = 12$ cm, vnitřní průměr dýzy stříkačky $d_2 = 3{,}0$ cm.

a) Jaký musí být přetlak p v hadici (rozdíl vnitřního tlaku a tlaku atmosférického), aby stříkačka dostříkla vodu do maximální vzdálenosti $l_\mathrm{m} = 20$ m? Do jaké maximální výšky h_m je stříkačka schopna dostříknout při tomto tlaku?
b) Jak dlouho může hasič hasit požár za uvedených podmínek, je-li na začátku objem vody v cisterně roven $\eta = 80$ % jejího vnitřního objemu?
c) Stříkačka působí na hasiče reaktivní silou proti směru vodního proudu. Jakou zpětnou sílu musí překonávat hasič, je-li při stříkání vody ze stříkačky v hadici tlak p podle a)?
d) Jaký je výkon čerpadla za daných podmínek?

Úlohu řešte obecně a potom pro dané hodnoty. Vodu považujte za ideální kapalinu, odpor vzduchu považujte za zanedbatelný, výškové rozdíly mezi hladinou vody v cisterně, čerpadlem, dýzou stříkačky a povrchem terénu považujte za nulové.

6. *Praktická úloha*:

Pohyb hladiny při výtoku kapaliny otvorem ve stěně nádoby

Vezměte plastovou láhev, která má mezi dnem a hrdlem stejný příčný průřez ve výškovém rozmezí aspoň 20 cm. V nejnižším bodě válcové části vytvořte pomocí hřebíku o průměru asi 2,5 mm zahřátého v plameni malý otvor. Na stěně válcové části vytvořte svislou stupnici v centimetrech s počátkem ve středu výtokového otvoru, která určuje výšku hladiny nad středem otvoru.

Naplňte láhev vodou a nechte ji vytékat. V okamžiku, kdy hladina dosáhne úrovně horního konce stupnice, začněte stisknutím stopek měřit čas. Optimální jsou stopky, které umožňují měřit mezičasy. Zaregistrujte časy průchodu hladiny každou ryskou, dokud voda tryská vodorovně a nestéká po stěně, a zapište je do tabulky. Celé měření proveďte 5krát.

Vyplňte zbývající část tabulky. V tabulce je $\overline{t}_i$ aritmetický průměr pěti naměřených časů, $\Delta t_i = \overline{t}_i - \overline{t}_{i-1}$ doba průchodu hladiny mezi dvěma sousedními ryskami, $t_i = \frac{\overline{t}_i + \overline{t}_{i-1}}{2}$ aritmetický průměr krajních časů intervalu Δt_i, $v_i = \frac{\Delta h}{\Delta t_i}$ průměrná rychlost pohybu hladiny mezi dvěma sousedními ryskami ($\Delta h = 0{,}01$ m).

i	$\frac{h}{\mathrm{m}}$	$\frac{t_{i1}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i2}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i3}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i4}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i5}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\overline{t}_i}{\mathrm{s}}$	$\frac{\Delta t_i}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_i = \frac{\overline{t}_i + \overline{t}_{i-1}}{2}}{\mathrm{s}}$	$\frac{v_i = \frac{\Delta h}{\Delta t_i}}{10^{-3}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$
0	0,20	–	–	–	–	–	0	–	–	–
1	0,19									
2	0,18									
3	0,17									
⋮	⋮									
17	0,03									
18	0,02									
19	0,01									

Považujte nyní rychlost v_i za okamžitou rychlost v čase t_i a do grafu závislosti rychlosti na čase vyneste jednotlivé body. Body proložte přímkou a určete její směrnici.

Stanovte fyzikální význam hodnoty směrnice a napište závěr o charakteru pohybu hladiny v láhvi.

7. Zemská atmosféra

Vzdušný obal Země tvoří plyny o průměrné relativní molekulové hmotnosti $M_\mathrm{r} = 28{,}96$. V úloze budeme uvažovat, že vzduch v blízkosti Země má teplotu $t_0 = 0$ °C a tlak $p_0 = 101\,300$ Pa. S rostoucí výškou h nad povrchem Země tlak vzduchu klesá podle vztahu

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} g}{RT} h},$$

kde $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.

a) Vypočtěte hustotu vzduchu ϱ_0 na povrchu Země při teplotě $t_0 = 0$ °C za použití zadaných hodnot a porovnejte ji s hustotou ϱ_{20}, stoupne-li teplota vzduchu na $t = 20$ °C a tlak vzduchu se nezmění.
b) Jaká bude hustota vzduchu ϱ ve výšce 11 km nad povrchem Země, pokud se teplota vzduchu nemění a je rovna t_0?
c) Uvažujte, že do výšky 11 km nad povrchem Země lze vyjádřit pokles teploty vzduchu pomocí vztahu $T = T_0 - bh$, kde $b = 0{,}006\,5\ \mathrm{K \cdot m^{-1}}$, h je výška nad povrchem Země v metrech. Porovnejte velikost střední kvadratické rychlosti molekul dusíku při povrchu Země, kde je teplota $t_0 = 0$ °C, a ve výšce $H = 11$ km nad povrchem Země.
d) Odvoďte vztah vyjadřující závislost počtu částic v 1 $\mathrm{m^3}$ vzduchu na výšce h nad povrchem Země. Uvažujte, že teplota vzduchu je stálá. Odhadněte počet částic v 1 $\mathrm{m^3}$ ve výšce 11 km nad povrchem Země.

KATEGORIE D

1. Posunování

Posunovací lokomotiva se na nádraží rozjížděla z klidu rovnoměrně zrychleným pohybem a za dobu 8,0 s urazila dráhu 24 m. Za dalších 5,0 s se velikost její rychlosti rovnoměrně zvětšila o $2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Po rovnoměrném pohybu trvajícím 20 s začala brzdit se stálým zrychlením $0{,}50\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ až do úplného zastavení.

a) Určete velikosti a_1, a_2 zrychlení na prvním a druhém úseku.
b) Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase během celého pohybu.
c) Z grafu určete celkovou uraženou dráhu a vypočtěte průměrnou rychlost lokomotivy.

2. Skateboard ve vlaku

Vlak se pohybuje po vodorovných přímých kolejích rychlostí o velikosti $v_1 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Přesně ve středu jednoho z vagónů, ve vzdálenosti $d = 8{,}0$ m od přední i zadní stěny, stojí chlapec na skateboardu. Podélná osa skateboardu je rovnoběžná se směrem kolejí, celková hmotnost chlapce se skateboardem je $m = 48$ kg. V určitém okamžiku začne vlak zrychlovat se zrychlením o velikosti $a = 0{,}75\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Proti pohybu skateboardu působí síla valivého odporu o velikosti $F_\mathrm{v} = \frac{1}{30}mg$.

a) Určete velikost a směr setrvačné síly působící na chlapce se skateboardem během zrychlování vlaku.
b) Určete velikost a' zrychlení chlapce vzhledem k vagónu.
c) Určete dráhu s vagónu během pohybu chlapce ve vagónu.
d) Určete bezprostředně před nárazem chlapce na stěnu vagónu velikost v' vzájemné rychlosti chlapce a vagónu.
e) Určete velikost a_max maximálního zrychlení vlaku, při němž by se chlapec na skateboardu nerozjel.

3. Srážka vagónů

Po přímých vodorovných kolejích jedou proti sobě dva vagóny, oba mají stejnou kinetickou energii. První má hmotnost $m_1 = 18$ t a velikost rychlosti $v_1 = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, druhý má hmotnost $m_2 = 32$ t. Po srážce se vagóny automaticky spojí.

a) Určete velikost v_2 rychlosti druhého vagónu.
b) Určete směr pohybu soupravy po srážce a velikost v rychlosti.
c) Určete poměr $\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}}$, kde E'_k je kinetická energie soupravy po srážce a E_k celková kinetická energie obou vagónů před srážkou.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

4. Zvedání řetězu

Na zemi u zdi domu ležel řetěz délky $l = 20$ m o hmotnosti $m = 30$ kg. Krajní část řetězu délky $l_1 = 6$ m byla zamotána do uzlu. Celý řetěz bylo třeba dopravit na plochou střechu domu ve výšce $h = 12$ m nad zemí. Adam spustil ze střechy provázek, jeho kamarád přivázal na provázek volný konec řetězu. Adam pak celý řetěz rovnoměrným pohybem za čas $t = 65$ s vytáhl nahoru.

a) Sestrojte graf závislosti velikosti síly na dráze, po které Adam působil.
b) Pomocí obsahu plochy pod grafem vypočtěte práci W, kterou Adam

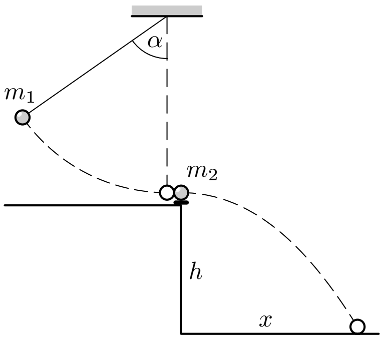
vytažením řetězu vykonal, a porovnejte ji s potenciální energií E_p řetězu na střeše.

c) Určete průměrný výkon P Adama při vytahování řetězu a velikost v rychlosti pohybu řetězu vzhůru.

Při řešení zanedbejte sílu, která souvisí s uvedením uzlu a jednotlivých článků řetězu do pohybu a s jejich zastavením.

5. Srážka kuliček

Kulička o hmotnosti m_1 zavěšená na tenkém vlákně délky l se dotýká druhé kuličky o hmotnosti m_2 položené na kraji stolu ve výšce h nad podlahou (obr. 1). První kuličku vychýlíme při napnutém vlákně o úhel α a pustíme. Při dosažení nejnižší polohy narazí do druhé kuličky, přičemž srážku považujeme za středovou a dokonale pružnou.



Obr. 1

a) Jaký úhel β svírá vlákno se svislým směrem v okamžiku, kdy první kulička dosáhne po srážce své nejvyšší polohy?

b) V jaké vodorovné vzdálenosti x od okraje stolu dopadne druhá kulička na podlahu?

Úlohu řešte obecně a potom pro hodnoty: $h = 90$ cm, $l = 80$ cm, $\alpha = 60°$ a pro tři různé poměry hmotností $m_1/m_2 = 2;\ 1;\ 1/2$.

6. *Praktická úloha*: **Měření hmotnosti**

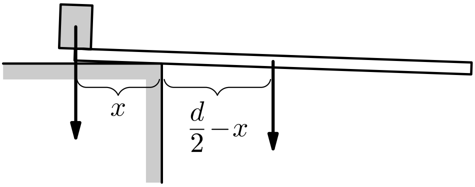
Teorie:

Tyč obdélníkového průřezu o hmotnosti m_0, na jejíž jeden konec položíme závaží o hmotnosti m_z, vysuneme co nejvíce přes hranu stolu tak, aby se ještě nepřevrátila. Závaží můžeme mít nad stolem (obr. 2a) nebo mimo stůl (obr. 2b). Ze známé hmotnosti m_z závaží, známé vzdálenosti x a známé délky d tyče lze vypočítat hmotnost tyče ze vztahu

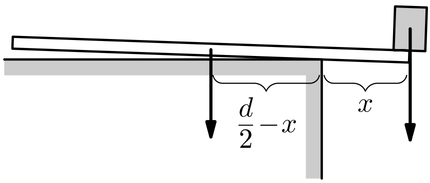
$$m_0 = \frac{2x}{d - 2x} m_z. \tag{1}$$

Nahradíme-li závaží tělesem o neznámé hmotnosti m, pak ze známé hmotnosti m_0 tyče, známé vzdálenosti x a známé délky d tyče lze vypočítat hmotnost tělesa ze vztahu

$$m = \frac{d - 2x}{2x} m_0. \tag{2}$$



Obr. 2a



Obr. 2b

Úkol:
Změřte popsanou metodou hmotnost tyče a hmotnosti aspoň dvou těles.

Pomůcky:
tyč délky aspoň 1 m, délkové měřidlo (např. svinovací metr), sada závaží, tělesa neznámé hmotnosti, technické váhy.

Postup:
a) Odvoďte vztahy (1) a (2).
b) Změřte délku d tyče. Na konce tyče je možné přilepit kousek kartonu zanedbatelné hmotnosti s malým přesahem, aby těžiště závaží, resp. tělesa, bylo umístěno nad příčnou hranou tyče. Poté položte tyč na

vodorovnou desku stolu kolmo k ostré hraně desky, umístěte na levý konec tyče závaží známé hmotnosti a posunováním tyče přes hranu desky tyč vyvažte. Do tabulky zapište hmotnost m_z závaží a příslušnou vzdálenost x. Podle vzorce (1) pak vypočtěte hmotnost m_0 tyče. Totéž proveďte se stejným závažím umístěným na opačném konci tyče. Měření proveďte se třemi dalšími závažími, která střídavě umísťujte na levý a pravý konec tyče. Poté vypočtěte průměrnou hmotnost tyče. Hmotnosti závaží v tabulce jsou pouze orientační, volte si je sami podle okolností.

c) Popsaným postupem zjistěte hmotnost aspoň dvou různých těles. Použijte vzorec (2), v němž m_0 je hmotnost tyče určená předchozím měřením. Výsledky zapište do tabulky a vypočtěte aritmetický průměr.

d) Hmotnosti tyče a těles určete též na technických vahách a výsledky porovnejte s výsledky provedené metody.

Číslo měření	$\frac{m_z}{\text{g}}$	$\frac{x}{\text{cm}}$	$\frac{m_0}{\text{g}}$
1	500		
2	500		
3	200		
4	200		
5	100		
6	100		
7	50		
8	50		
Hmotnost tyče (aritmetický průměr)			

Číslo měření	$\frac{m_0}{\text{g}}$	$\frac{x}{\text{cm}}$	$\frac{m}{\text{g}}$
1	500		
2	500		
Hmotnost 1. tělesa (aritmetický průměr)			

Číslo měření	$\frac{m_0}{\mathrm{g}}$	$\frac{x}{\mathrm{cm}}$	$\frac{m}{\mathrm{g}}$
1	500		
2	500		
Hmotnost 2. tělesa (aritmetický průměr)			

7. Jízda na kolotoči

Kolotoč tvoří vodorovná kruhová deska s upevněnými modely zvířat se sedačkami. Na kolotoči se točí dva kamarádi, Tomáš a Jan. Tomáš sedí na koni ve vzdálenosti $r_1 = 3{,}2$ m od osy otáčení, Jan na velbloudu ve vzdálenosti $r_2 = 2{,}4$ m od osy otáčení. Kolotoč se otáčí rovnoměrně, doba jedné otáčky je $T = 7{,}0$ s.

a) Určete obvodové rychlosti v_1, v_2 a úhlové rychlosti ω_1, ω_2 Tomáše a Jana.

b) Během zastavování rovnoměrně zpomaleným pohybem kolotoč vykonal přesně 2,5 otáčky. Určete dobu t_0, za kterou se kolotoč zastavil.

c) Určete velikosti $a_{\mathrm{d}1}$, $a_{\mathrm{d}2}$ dostředivých zrychlení Tomáše a Jana během rovnoměrného otáčivého pohybu a velikosti a_1, a_2 jejich tečných zrychlení během zastavování.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

* * * * *

REGULA FALSI – FALEŠNÝ PŘEDPOKLAD

Velmi dávno v egyptské škole (je to doloženo na papyrech z 18. stol. př. n. l.) řešili úlohu: *Celek a jeho čtvrtina dávají 15. Kolik je celek?* Zachoval sa tento návod: *Počítej se čtyřmi, k tomu musíš přidat čtvrtinu, tedy jednu; celkem je to 5. Vyděl 15 pěti, dostaneš tři. To vynásob čtyřmi. Hledané množství celku je 12.* Dnes bychom postup vysvětlili takto: Hledáme takové číslo x, aby platilo $x + x/4 = 15$. Předpokládejme, že $x = 4$, potom $4 + 4/4 = 5$. Pravá strana této rovnosti 5 je třikrát (15/5) menší, než je třeba, předpoklad je falešný. Existuje ale souvislost mezi tímto a hledaným výsledkem. Jestliže vynásobíme rovnost $4 + 4/4 = 5$ třemi, dostaneme $(3 \cdot 4) + (3 \cdot 4)/4 = 15$. Porovnáním s rovnicí $x + x/4 = 15$ vidíme, že $x = 3 \cdot 4 = 12$. Takový postup nazýváme metodou falešného předpokladu – regula falsi. V trochu jiné podobě je používán např. k přibližnému určení kořenů rovnice $f(x) = 0$ metodou tětiv nebo tečen (odhad kořene se použije k výpočtu odhadu přesnějšího).

D. Jedinák, upravil M. Závodný