Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 2, 56–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146423

NAŠE SOUTĚŽ

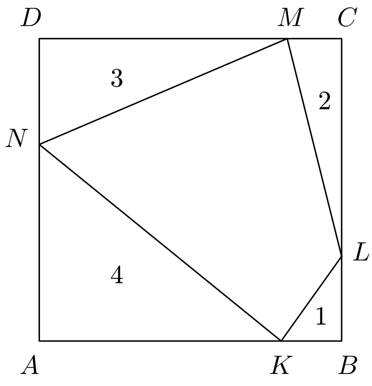
V předchozích dvou ročnících Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika *Naše soutěž*. V každém čísle byly vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální.

V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulý i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. srpna 2011* na adresu redakce.

Úloha 19. Do čtverce $ABCD$ je vepsán čtyřúhelník $KLMN$ podle obrázku. Určete v centimetrech délku a strany čtverce $ABCD$, jestliže $|KB| = 1$ cm a obsahy trojúhelníků KBL, LCM, MDN, NAK jsou po řadě 1 cm^2, 2 cm^2, 3 cm^2, 4 cm^2.



(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 20. *Snímání povrchu Země.*
V současné době jste již určitě všichni slyšeli o navigačním systému GPS (*G*lobální *P*olohový *S*ystém). To, že funguje a že ho můžeme používat, zajišťuje 24 satelitů obíhajících kolem Země. Hmotnost jedné družice GPS je $m = 1{,}8$ tuny, tato družice obletí Zemi za 11 hodin 58 minut. Poloměr Země je 6370 km, hmotnost Země je $6{,}00 \cdot 10^{24}$ kg. Určete

a) výšku satelitu nad povrchem Země,
b) velikost gravitační síly, kterou působí Země na satelit GPS při pohybu po kruhové oběžné dráze, a rychlost jeho pohybu na této oběžné dráze,
c) zorný úhel ve stupních, pod kterým satelit GPS snímá Zemi, a největší vzdálenost bodů (měřenou po povrchu Země), které ještě může tento jeden satelit v daném okamžiku zaměřit.

Ve všech úlohách zanedbejte vliv odporu prostředí. Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty. (*Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 4/2010

Úloha 15. Rozhodněte, zda lze najít množinu obsahující 2 010 různých přirozených čísel, jejichž každá neprázdná podmnožina má a) součin, b) součet nedělitelný číslem 2 010. Součin, resp. součet, čísel v jednoprvkové podmnožině je to číslo samo. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení:

a) Lze. Stačí vzít všechna čísla tvaru $2010k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Nelze. Kdyby to šlo, musela by čísla být různá od násobků čísla 2010 (kvůli jednoprvkovým podmnožinám). Vezměme podmnožiny

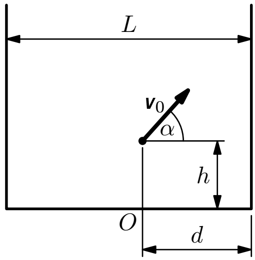
$$\{a_1\},\ \{a_1, a_2\},\ \{a_1, a_2, a_3\},\ \ldots, \{a_1, a_2, \ldots, a_{2010}\}.$$

Těch je 2010, ale zbytků v součtech

$$a_1, a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{2010}$$

je nejvýše 2009 (předpokládáme totiž, že nulový zbytek není). Podle Dirichletova principu je zbytek součtu čísel po dělení číslem 2010 aspoň ve dvou podmnožinách stejný, takže rozdíl dvou součtů se stejným zbytkem je dělitelný číslem 2010. To je ale spor s předpokladem.

Úloha 16. *Házení míčkem.* Chlapec stojí mezi bočními stěnami dvou panelových domů (nejsou v nich okna), jejichž vzájemná vzdálenost je $L = 12$ m. Chlapec vyhodil míček rukou ve výšce $h = 1{,}8$ m proti stěně prvního domu (obr. 1), po odrazu od druhé stěny míček dopadl k jeho nohám.



Obr. 1

a) Nakreslete jednoduchý náčrt situace.

b) Odvoďte vztah pro výpočet velikosti počáteční rychlosti v_0 jako funkci úhlu α. Pod jakým úhlem byl míček vržen, aby nastala popsaná situace? Proveďte diskusi výsledku vzhledem k poloze chlapce v okamžiku vrhu.

c) Odvoďte obecné vztahy pro výšky míst odrazů na obou stěnách od povrchu země v závislosti na poloze chlapce při daném úhlu vrhu míčku.

d) Uvažujte, že chlapec hodil míček z místa uprostřed mezi stěnami paneláků pod úhlem $\alpha = 30°$. Vypočtěte velikost počáteční rychlosti v_0, jakou musel chlapec míček hodit, a výšky h_1 a h_2 od povrchu země, ve kterých se míček odrazí od paneláků.

Předpokládejte, že odrazy míčku od stěny jsou dokonale pružné. Odpor prostředí při pohybu míčku neuvažujte, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

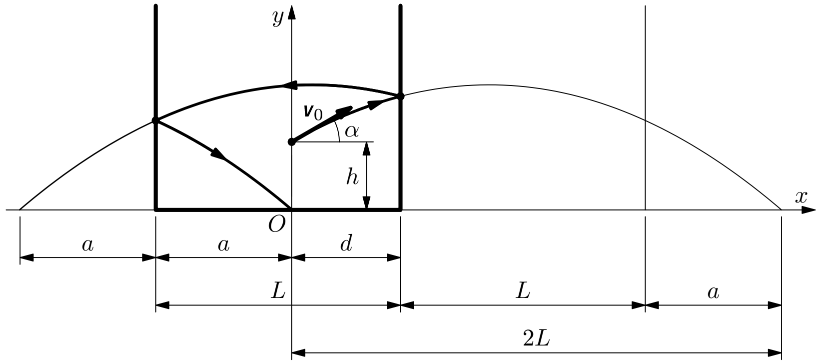
(*Ivo Volf, Miroslava Jarešová*)

Řešení:

a) Celá situace je znázorněna na obr. 2.

b) Zvolíme počátek soustavy souřadnic v místě, kde chlapec stojí (obr. 2). Pokud by se míček pohyboval jen ve volném prostoru, bylo by možno jeho okamžitou polohu v závislosti na čase popsat pomocí souřadnic

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1}$$



Obr. 2

Na obr. 2 je tato trajektorie zakreslena tenkou čarou. Vzhledem k tomu, že míček se pohybuje mezi stěnami, dochází zde k odrazům; skutečný pohyb míčku mezi stěnami je zakreslen na obr. 2 silnou čarou.

Pro dobu výstupu míčku platí $T_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, pro výšku výstupu platí vztah $H = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$, doba klesání míčku je dána vztahem

$$T_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\left(h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}}.$$

Celková doba pohybu míčku (až do okamžiku, než skončí chlapci u nohou) je

$$T = T_1 + T_2 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}}.$$

Podle zadání musí být splněna podmínka $x = 2L = v_0 T \cos\alpha$ (obr. 2).

Po dosazení za T dostaneme rovnici

$$2L = v_0 \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}} \right) \cos\alpha.$$

Z této rovnice postupnými úpravami (jejichž nástin zde bude níže uveden) vyjádříme v_0 jako funkci úhlu α. Nejprve celou rovnici upravíme na tvar

$$\frac{2Lg}{v_0 \cos\alpha} - v_0 \sin\alpha = \sqrt{2hg + v_0^2 \sin^2\alpha}.$$

Po umocnění této rovnice na druhou pak postupnými úpravami vyjádříme v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2L^2 g}{\cos\alpha(h\cos\alpha + 2L\sin\alpha)}} \tag{2}$$

Z výsledku je vidět, že velikost počáteční rychlosti nezávisí na poloze místa, kde chlapec stojí.

c) Z rovnic (1) a (2) nejprve vyloučíme čas t, tj. vyjádříme souřadnici y jako funkci proměnné souřadnice x:

$$y = h + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{hx^2}{4L^2} - \frac{x^2}{2L}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Při odrazu na první stěně je $x = d$, takže potom

$$y_1 = h + d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{hd^2}{4L^2} - \frac{d^2}{2L}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Při odrazu na druhé stěně dosadíme $x = L + d$, což je zřejmé z obr. 2. Potom

$$y_2 = h + (L+d)\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{h(L+d)^2}{4L^2} - \frac{(L+d)^2}{2L}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

d) Pro úhel $\alpha = 30°$ dostaneme

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 12^2\cdot 9{,}8}{\cos 30°\cdot(1{,}8\cdot\cos 30° + 2\cdot 12\cdot\sin 30°)}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 15{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Bude-li stát chlapec uprostřed mezi stěnami, pak výšku odrazu h_1 na první stěně určíme dosazením za $d = \frac{L}{2} = 6$ m do vztahu pro y_1, výšku odrazu h_2 na druhé stěně určíme opět dosazením za $d = \frac{L}{2} = 6$ m, tentokrát do vztahu pro y_2. Po dosazení dostaneme

$$h_1 = \left(1{,}8 + 6\cdot\mathrm{tg}\,30° - \frac{1{,}8\cdot 6^2}{4\cdot 12^2} - \frac{6^2}{2\cdot 12}\cdot\mathrm{tg}\,30°\right)\ \mathrm{m} \doteq 4{,}3\ \mathrm{m},$$

$$h_2 = \left(1{,}8 + 18\cdot\mathrm{tg}\,30° - \frac{1{,}8\cdot 18^2}{4\cdot 12^2} - \frac{18^2}{2\cdot 12}\cdot\mathrm{tg}\,30°\right)\ \mathrm{m} \doteq 3{,}4\ \mathrm{m}.$$