Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 3, 58–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146374

NAŠE SOUTĚŽ

V předchozím ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika *Naše soutěž*. V každém čísle byly vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální.

V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulý i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude periodicky (ročně) zaslána matematická literatura.

Nyní tedy předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. listopadu 2010* na adresu redakce.

Úloha 13. Do daného trojúhelníku ABC vepište rovnoběžník $CKLM$ tak, aby bod K ležel na straně AC, bod L na AB, bod M na BC a aby obsah rovnoběžníku byl roven čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC.

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 14. *Těleso na nakloněné rovině.* Těleso je vysláno posuvným pohybem vzhůru po nakloněné rovině počáteční rychlostí $v_0 = 2{,}00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Úhel nakloněné roviny je $\alpha = 15°$, součinitel smykového tření je $f = 0{,}10$.

a) Za jakou dobu a v jaké vzdálenosti se těleso zastaví?

b) Za jakou dobu se těleso dostane při pohybu zpět do původní počáteční polohy?

c) Jakou rychlostí projde těleso při pohybu zpět původní počáteční polohou?

d) Za jakou dobu od začátku pohybu dosáhne těleso stejně velké rychlosti, jako byla počáteční, a jaká bude v tomto okamžiku jeho vzdálenost od počáteční polohy?

e) Za jakou dobu od začátku pohybu dosáhne těleso stejně velké rychlosti, jako byla počáteční, a jaká bude v tomto okamžiku jeho vzdálenost od počáteční polohy?

Předpokládejte, že nakloněná rovina má od počáteční polohy tělesa dostatečnou délku nahoru i dolů, aby mohl proběhnout uvažovaný pohyb. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. (*Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 1/2010

Úloha 9. Dokažte nerovnost:

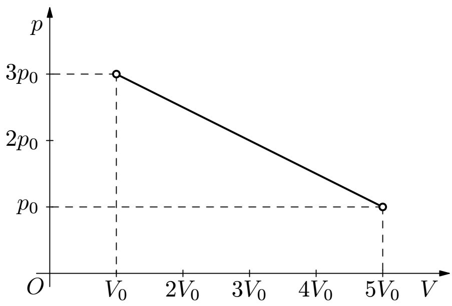
$$\log_2 3 + \log_3 4 + \cdots + \log_{2009} 2010 > 2008 \cdot \sqrt[2008]{10}$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Postupně upravujeme levou stranu dokazované nerovnosti (první úprava je důsledkem aritmeticko-geometrické nerovnosti pro různá čísla):

$$\begin{aligned}
\log_2 3+\log_3 4+\cdots+\log_{2009} 2010 &> \sqrt[2008]{\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_{2009} 2010} =\\
&= \sqrt[2008]{\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_{2008} 2009^{\log_{2009} 2010}} =\\
&= \sqrt[2008]{\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_{2008} 2010} =\\
&= \sqrt[2008]{\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_{2007} 2010} =\\
&\ \ \vdots\\
&= \sqrt[2008]{\log_2 3\cdot\log_3 2010} =\\
&= \sqrt[2008]{\log_2 2010} > \sqrt[2008]{\log_2 2000} = \sqrt[2008]{1+\log_2 1000} =\\
&= \sqrt[2008]{1+3\log_2 10} > \sqrt[2008]{1+3\log_2 8} = \sqrt[2008]{10}
\end{aligned}$$

Úloha 10. Ideální plyn má při objemu V_0 tlak p_0 a termodynamickou teplotu T_0. Při rozepnutí plynu z objemu V_0 na objem $5V_0$ jeho tlak lineárně klesne z $3p_0$ na p_0 (obr. 1).



Obr. 1

Určete při tomto ději minimální a maximální termodynamickou teplotu. (*Josef Jírů*)

Řešení: Lineární funkce je dána předpisem

$$p = -\frac{p_0}{2V_0} \cdot V + \frac{7}{2}p_0.$$

Současně platí stavová rovnice ideálního plynu

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$

Z rovnic vyloučíme tlak a dostaneme funkční závislost termodynamické teploty na objemu

$$T = -\frac{T_0}{2V_0^2} \cdot V^2 + \frac{7T_0}{2V_0} \cdot V. \tag{1}$$

Grafem je parabola orientovaná dolů a protínající vodorovnou osu v počátku a v objemu $V_1 = 7V_0$. Maximum kvadratické funkce nastane proto pro

$$V_2 = \frac{V_1}{2} = \frac{7}{2}V_0.$$

Dosazením tohoto objemu do funkční závislosti (1) dostaneme

$$T_{\max} = \frac{49}{8}T_0.$$

Pro $V \leq V_2$ je uvedená kvadratická funkce rostoucí, pro $V \geq V_2$ je klesající. Minimum proto nastává v jednom z krajních objemů. V počátečním stavu je teplota $3T_0$, v konečném pak $5T_0$. Minimální teplota proto je

$$T_{\min} = 3T_0.$$

Poznámka: K nalezení maxima lze dospět též pomocí derivace. Derivace funkce (1) je

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V} = -\frac{T_0}{V_0^2} \cdot V + \frac{7T_0}{2V_0}.$$

Derivace je rovna nule pro $V_2 = \frac{7}{2}V_0$. Pro $V < V_2$ je derivace kladná, pro $V > V_2$ je derivace záporná, proto při objemu V_2 je teplota plynu maximální. Další postup je stejný. Místo závislosti termodynamické teploty na objemu je možné pracovat se závislostí na tlaku.

Stav soutěže po 10 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (Gymnázium Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů