Rozhledy matematicko-fyzikální

52. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 3, 26–44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146370

SOUTĚŽE

52. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.)

KATEGORIE A

1. Dvě tělesa vržená po sobě šikmo vzhůru

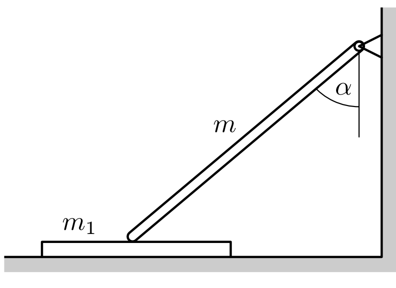
Z určitého místa na vodorovné rovině vrhneme šikmo vzhůru stejně velkou počáteční rychlostí po sobě dvě tělesa. První těleso vrhneme pod elevačním úhlem α_1 a počáteční rychlost obou těles bude mít velikost v_0.

a) Určete podmínky, které musí být splněny, aby obě tělesa dopadla současně do stejného místa. Odpor vzduchu zanedbejte. Řešte obecně.

b) Tutéž úlohu řešte pro velikost počáteční rychlosti obou těles $v_0 = 30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a elevační úhel prvního tělesa $\alpha_1 = 57°$. Pro tyto hodnoty také ve vhodném měřítku nakreslete trajektorie obou těles a sestrojte graf závislosti okamžité výšky obou těles na čase měřeném od okamžiku vržení prvního tělesa.

2. Posouvání desky

Na hladké vodorovné rovině leží deska hmotnosti m_1. Na desce leží volný konec tyče o hmotnosti m, jejíž druhý konec je kloubově upevněn na svislé stěně tak, že svírá se stěnou úhel α (obr. 1). Těžiště tyče je v jejím středu. Součinitel smykového tření mezi deskou a tyčí je f. Předpokládejme nejprve, že tření mezi deskou a vodorovnou rovinou je zanedbatelné.



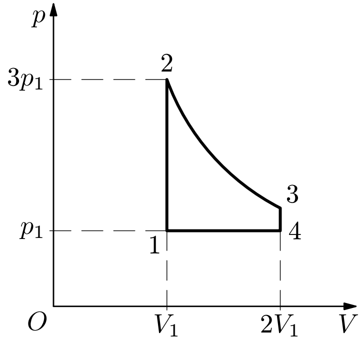
Obr. 1

a) Jak velkou vodorovnou silou $\boldsymbol{F}_1$ musíme působit na desku, budeme-li ji rovnoměrně posouvat směrem ke stěně? Stanovte podmínku, kdy se nám tento posuv podaří uskutečnit. Jakou silou $\boldsymbol{F}_2$ přitom působí tyč na kloub, ve kterém je upevněna?
b) Jak velkou vodorovnou silou $\boldsymbol{F}_3$ musíme působit na desku, chceme-li ji povytáhnout rovnoměrně směrem od stěny? Jakou silou $\boldsymbol{F}_4$ působí nyní tyč na kloub, ve kterém je upevněna?
c) Jak se změní výsledky v částech a) a b), není-li tření mezi deskou a vodorovnou rovinou zanedbatelné a součinitel smykového tření mezi nimi je f_1?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $m_1 = 2{,}0$ kg, $m = 10{,}0$ kg, $\alpha = 50°$, $f = 0{,}35$, $f_1 = 0{,}10$.

3. Kruhový děj

V p-V diagramu (obr. 2) je znázorněn kruhový děj pro $n = 1$ mol ideálního plynu s dvouatomovými molekulami. Teplota T_1 je 300 K.



Obr. 2

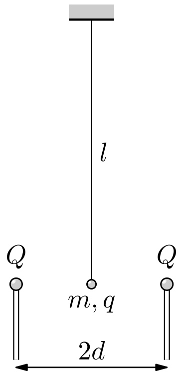
Určete teplo vyměněné s okolím a práci plynu spotřebovanou nebo vykonanou plynem pro každý jednotlivý děj a vypočítejte účinnost kruhového děje 12341. Děj 2-3 je

a) izotermický,
b) adiabatický.

Vnitřní energie plynu s dvouatomovými molekulami $U = \frac{5}{2}\,nRT$, Poissonova konstanta $\varkappa = 1{,}40$.

4. Elektrické kyvadélko

Kulička o hmotnosti $m = 20$ mg, na které je náboj $q = +0{,}25$ nC, je zavěšena na tenkém nevodivém vlákně délky $l = 15{,}0$ cm tak, že se nachází uprostřed mezi dvěma kovovými izolovanými kuličkami, které jsou upevněny ve vzájemné vzdálenosti $2d = 6{,}0$ cm v téže horizontální rovině (obr. 3). Na obou je stejný náboj $Q = +1{,}00$ nC.



Obr. 3

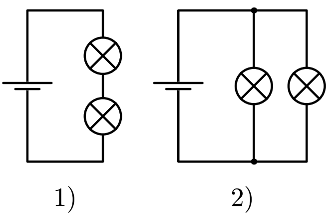
a) Ověřte, že pro dané hodnoty veličin je rovnovážná poloha zavěšené kuličky stabilní.
b) Určete, s jakou periodou bude zavěšená kulička kývat okolo rovnovážné polohy, jestliže ji nepatrně vychýlíme α) ve směru spojnice pevných kuliček, β) kolmo ke spojnici pevných kuliček.

Konstanta Coulombova zákona je $k = 9{,}00 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$. Rozměry kuliček zanedbejte.

Poznámka: Pro $\varepsilon \ll 1$ platí přibližný vztah $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$.

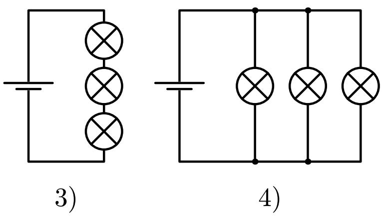
5. Obvody se žárovkami

Dvě stejné žárovky byla připojeny ke zdroji o elektromotorickém napětí U_e jednak sériově (1), jednak paralelně (2) – viz obr. 4. Kupodivu v obou případech svítily stejně.



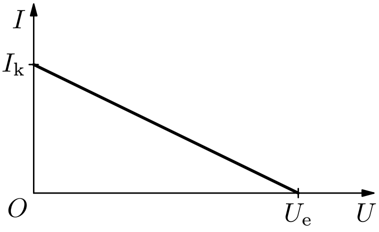
1) 2)

Obr. 4

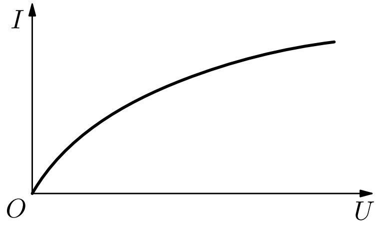


3) 4)

Obr. 5



Obr. 6



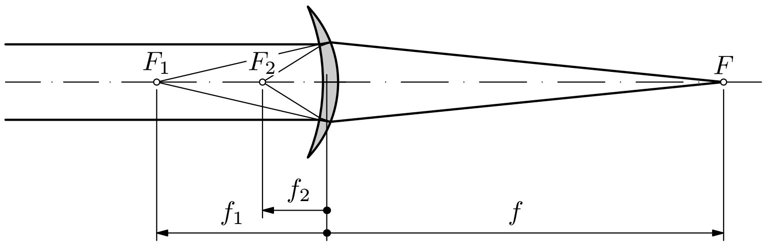
Obr. 7

a) Porovnejte odpor R svítících žárovek s vnitřním odporem R_i zdroje.
b) Porovnejte účinnost obvodu v obou případech.
c) K témuž zdroji připojíme tři stejné žárovky jako v předcházejícím pokusu jednak sériově (3), jednak paralelně (4) – viz obr. 5. Ve kterém zapojení budou svítit víc?

Úlohu c) řešte graficky. Předpokládáme, že zatěžovací charakteristika zdroje je lineární (obr. 6) a voltampérová charakteristika žárovky má průběh podle obr. 7.

6. *Praktická úloha*: **Měření brýlové čočky**

Dopadá-li na dutou stranu dutovypuklé brýlové čočky svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou, soustředí se za čočkou do ohniska F. Část světla se však na rozhraních čočky odráží. Odražené paprsky se soustřeďují do dvou ohnisek F_1 a F_2 (obr. 8).



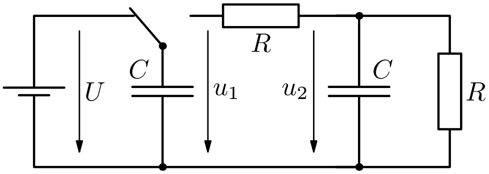
Obr. 8

Úkol:

Změřte ohniskové vzdálenosti f, f_1 a f_2 brýlové spojky o optické mohutnosti 2 až 3 dioptrie. Z naměřených hodnot vypočítejte poloměry kulových ploch čočky a index lomu skla, ze kterého je vyrobena. Potřebné vztahy odvoďte. Tloušťku čočky zanedbejte.

Poznámky k provedení:
Čočku vhodně upevněte a osvětlete ji zdrojem světla malých rozměrů, který umístíte do vzdálenosti alespoň 3 m. Pokud použijete jako světelný zdroj Slunce, provádějte měření navečer, kdy jeho paprsky nejsou tak intenzivní, a vezměte si tmavší sluneční brýle, abyste nebyli oslněni při vyhledávání ohniska F. Ohniska F_1 a F_2 vyhledejte pomocí růžku papíru, abyste příliš nezakrývali paprsky dopadající na čočku.

7. Vybíjení kondenzátoru
Kondenzátor o kapacitě $C = 1{,}0\ \mu\mathrm{F}$ byl nabit ze zdroje o svorkovém napětí $U = 10{,}0\ \mathrm{V}$ a v čase $t = 0$ připojen podle obr. 9 k obvodu se dvěma rezistory o odporu $R = 1{,}0\ \mathrm{M\Omega}$ a dalším kondenzátorem o kapacitě $C = 1{,}0\ \mu\mathrm{F}$.



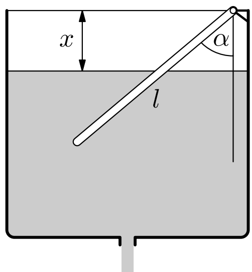
Obr. 9

Užitím numerického modelování zjistěte, jak se v závislosti na čase měnila napětí u_1 a u_2 na kondenzátorech. Z tabulky a grafu určete, kdy bylo napětí u_2 maximální a jaká byla v tomto okamžiku jeho hodnota.

KATEGORIE B

1. Tyč v kapalině
Konec tenké homogenní tyče délky l a stálého průřezu o obsahu S vyrobené z materiálu o hustotě ϱ je otáčivě upevněn u horního okraje nádoby, která byla naplněna kapalinou o hustotě $\varrho_k > \varrho$. Kapalina vytéká malým otvorem ve dně a hladina postupně klesá (obr. 1). Určete, jak závisí na vzdálenosti x hladiny od horního okraje nádoby

a) odchylka α tyče od svislého směru,
b) síla, kterou působí tyč na osu otáčení.



Obr. 1

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $l = 80$ cm, $S = 1{,}0\ \mathrm{cm}^2$, $\varrho = 800\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho_\mathrm{k} = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Pro dané hodnoty také sestrojte grafy obou závislostí.

2. Satelitní přenos signálu

V průběhu MS v kopané byl televizní signál z Johannesburgu (26° j.š.; 28° v.d.) přenášen stacionární satelitní družicí *Astra*, umístěnou nad 28° v.d.

a) Jaká je vzdálenost R stacionární družice od zemského středu?

b) Určete dráhu, kterou musí signál urazit při spojení přes satelit do bulharské Varny, ležící na 43° s.š. a 28° v.d., a dobu t_1, kterou k tomu potřebuje. Vliv atmosféry na šíření rádiových vln zanedbejte.

c) Jaká by byla doba t_2 přenosu signálu, kdyby byl veden nejkratší cestou po zemském povrchu, když zanedbáme zpoždění signálu na retranslačních a zesilovacích stanicích?

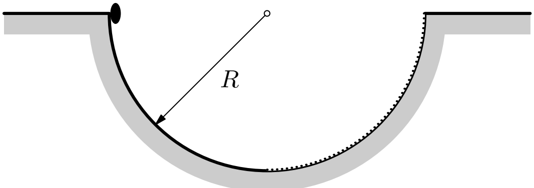
d) Mohli signál z této družice sledovat diváci v australském Melbourne (38° j.š.; 145° v.d.) a v brazilském Rio de Janeiru (23° j.š.; 43° z.d.)? Vzdálenost Melbourne od průsečíku 28. poledníku v.d. s rovníkem (měřená po zemském povrchu) je s_1, vzdálenost Ria de Janeira od stejného místa je s_2. Vzdálenosti s_1 a s_2 vyhledejte pomocí vhodného vyhledávače (např. Google Earth), stačí s přesností na 100 km.

e) Pokud ano, jaká byla v tomto případě doba přenosu t_3?

Zemi považujte za těleso kulového tvaru o poloměru $R_\mathrm{z} = 6\,370$ km, hmotnost Země $M_\mathrm{z} = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

3. Klouzání po kulové ploše

Tělísko zanedbatelných rozměrů volně pustíme po vnitřní stěně duté polokoule poloměru R, jejíž levá polovina je dokonale hladká a pravá polovina mírně zdrsněná (obr. 2). Součinitel tření mezi plochou a tělískem v pravé polovině je $f = 0{,}15$. Tělísko je na počátku v klidu ve výšce R nad nejnižším místem polokoule.



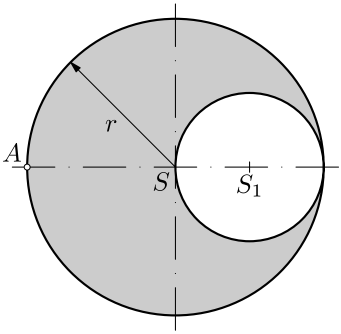
Obr. 2

Určete velikost a směr zrychlení tělíska:

a) když urazí dráhu délky 1/12 kružnice s poloměrem R,
b) když urazí dráhu délky 1/6 kružnice s poloměrem R,
c) v nejnižším bodě dráhy těsně před vjezdem do drsnější poloviny,
d) v nejnižším bodě dráhy těsně po nájezdu do drsnější poloviny.

4. Stůl

Vodorovná homogenní kruhová deska o poloměru r po straně s kruhovým otvorem o poloměru $r/2$ (obr. 3) má být použita pro dekorační stůl se třemi tenkými svislými nohami umístěnými na obvodu kruhu, jedna v bodě A.



Obr. 3

Kam musíme umístit zbývající dvě nohy,

a) aby všechny tři byly zatíženy stejně?
b) aby stůl měl co největší stabilitu?

Hmotnost noh zanedbejte.

5. Kyvadla

Dvě matematická kyvadla umístěná na povrchu Země kmitají s malou amplitudou a jejich doby kmitu jsou v poměru $T_1 : T_2 = 1 : 2$. Rozdíl délek těchto kyvadel je 0,6 m.

a) Určete délky l_1, l_2 obou kyvadel a periody kmitů T_1 a T_2 obou kyvadel.
b) Jak bychom museli změnit délku prvního kyvadla, aby kmitalo na Marsu se stejnou periodou T_1 jako na Zemi? S jakou periodou by pak kmitalo na Marsu druhé kyvadlo, kdyby rozdíl délek byl opět 0,6 m?

Při řešení úlohy neuvažujte rotaci Země, tj. uvažujte, že velikost tíhového zrychlení na povrchu Země je stejně velká jako velikost gravitačního zrychlení na povrchu Země. Hmotnost Země $M_\mathrm{Z} = 6 \cdot 10^{24}$ kg, poloměr Země $R_Z = 6\,370$ km, hmotnost Marsu je $M_\mathrm{M} = 0{,}107\,4\,M_\mathrm{Z}$, poloměr Marsu je $R_\mathrm{M} = 3\,400$ km, $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Řešte pouze užitím údajů uvedených v zadání.

6. *Praktická úloha*: **Určení zatěžovací konstanty termistoru**

Teorie: Zatěžovací konstanta D termistoru je poměr mezi elektrickým výkonem P rozptýleným v termistoru a zvýšením Δt jeho teploty vzhledem k teplotě t_o okolního prostředí v ustáleném stavu:

$$D = \frac{P}{\Delta t}, \qquad [D] = \mathrm{W \cdot K^{-1}}.$$

Zatěžovací konstanta je tedy číselně rovna příkonu, který způsobí ohřátí termistoru o 1 K nad teplotu okolí. Jmenovitý odpor termistoru R_{25} je definován jako odpor při teplotě 25 °C.

Úkoly:

a) Opatřete si tyčinkový nebo destičkový termistor o jmenovitém odporu R_{25} mezi 100 Ω a několika kΩ a pokud možno zjistěte (např. na webu) jeho maximální výkonové zatížení P_max.

b) Umístěte termistor do vhodné lázně a změřte odpor termistoru při různých teplotách v intervalu 20 °C až 90 °C. Sestrojte graf závislosti teploty termistoru na jeho odporu.

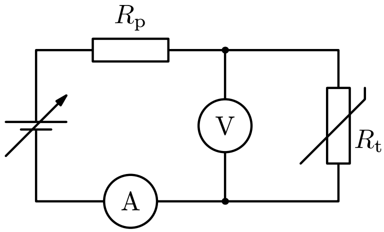
c) V zapojení podle obr. 4 změřte závislost napětí na termistoru na procházejícím proudu. Určete, jak se s rostoucím proudem mění elektrický příkon termistoru, jeho odpor a teplota.

d) Ověřte, že mezi elektrickým příkonem P termistoru a zvýšením Δt teploty termistoru nad teplotu okolí je vztah přímé úměrnosti, a určete zatěžovací konstantu D.

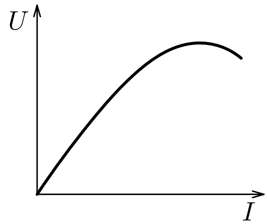
Provedení úlohy:

• Pro měření odporu termistoru při různých teplotách připojíme termistor k ohmmetru a spolu s teploměrem jej zasuneme do tenkostěnné zkumavky a utěsníme vatou. Zkumavku vložíme do termosky s horkou vodou, počkáme, až se údaje ohmmetru a teploměru ustálí, a zapíšeme je. Před každým dalším měřením část vody odlejeme a nahradíme vodou studenou. Měření opakujeme, dokud teplota v termosce neklesne pod teplotu okolí.

• V zapojení podle obr. 4 použijeme ochranný rezistor R_p, jehož odpor by měl být přibližně polovinou jmenovitého odporu termistoru R_{25}. Při měření nastavíme nejprve malé napětí zdroje, při kterém bude elektrický příkon termistoru menší než $0{,}1\,P_\mathrm{max}$. Pak budeme napětí zdroje po malých skocích zvětšovat a po každém zvětšení počkáme, až se teplota termistoru a údaje měřicích přístrojů ustálí. Pak teprve zapíšeme údaje ampérmetru a voltmetru do tabulky a vypočítáme příkon termistoru a jeho odpor. Jakmile se příkon termistoru bude přibližovat k P_max, přestane při rostoucím proudu napětí na termistoru růst a začne se zmenšovat (obr. 5). Při dalším zvětšování proudu by se termistor zničil přehřátím. Měření proto ukončíme, když dosáhneme příkonu asi $0{,}7\,P_\mathrm{max}$.



Obr. 4



Obr. 5

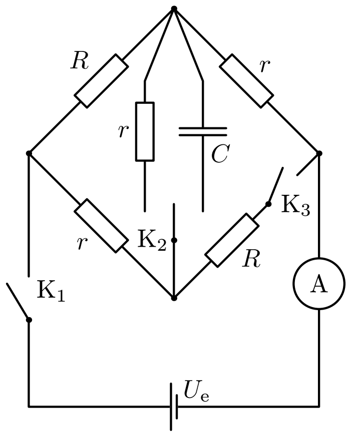
• Při měření podle obr. 4 je třeba, aby okolo termistoru mohl volně proudit vzduch a aby se okolní podmínky neměnily. Proto je vhodné přikrýt držák s termistorem větší plechovou nádobou, nejlépe hliníkovou.
• Doporučujeme zpracovat výsledky měření v Excelu. V grafu závislosti teploty termistoru na odporu proveďte polynomickou regresi 4. stupně a regresní vzorec použijte pro výpočet teplot při měření podle obr. 4. Koeficienty vzorce je třeba opsat alespoň na čtyři platné číslice. V grafu závislosti P na Δt použijte lineární regresi a z regresního vzorce určete hledanou zatěžovací konstantu D.

7. Elektrický obvod

V elektrickém obvodu podle obr. 6 jsou všechny kontakty rozpojeny. Elektromotorické napětí zdroje je $U_\mathrm{e} = 12$ V, vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný. Při zapojení spínače K_1 ukáže ampérmetr proud $I_1 = 0{,}20$ A. Pak připojíme spínač K_2 k rezistoru r. Obvodem nyní prochází proud $I_2 = 0{,}30$ A.

a) Určete velikosti odporů r a R.

b) Jaký proud bude procházet ampérmetrem při zapojení všech tří spínačů k rezistorům?



Obr. 6

Jaký náboj bude na kondenzátoru o kapacitě $C = 4\,\mu F$, přepojíme-li kontakt K_2 ke kondenzátoru, když

c) spínač K_3 bude rozpojen,

d) spínač K_3 bude sepnut?

KATEGORIE C

1. Brzdění vlaku

Vlak délky $d = 180$ m má hmotnost $m = 280$ t a pohybuje se rychlostí $v_1 = 90$ km·h^{-1}. Začne brzdit a během rovnoměrně zpomaleného pohybu se zrychlením o velikosti $a = 0{,}60$ m · s^{-2} klesne velikost rychlosti vlaku na hodnotu $v_2 = 36$ km·h^{-1}. V tomto okamžiku čelo lokomotivy vjíždí na most délky $l = 300$ m. V okamžiku, kdy konec vlaku opouští most, začne vlak zrychlovat se stálým výkonem $P = 1{,}5$ MW, až rychlost dosáhne původní velikosti rychlosti v_1.

a) Určete dobu Δt_1 brzdění.

b) Určete dráhu s uraženou během brzdění.

c) Určete dobu Δt_2 jízdy rovnoměrným pohybem.

d) Určete dobu Δt_3 zrychlování.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

2. Tenis

Délka tenisového hřiště, tedy vzájemná vzdálenost základních čar, je $d_1 = 23{,}78$ m. Síť má výšku $h_\mathrm{s} = 0{,}91$ m. Tenista odehrál míč ve výšce $h_0 = 1{,}40$ m nad základní čarou vodorovně kolmo k síti.

a) Míček dopadl na základní čáru soupeře. Určete velikost v_{01} počáteční rychlosti míčku, dobu letu míčku t_1 a výšku Δh míčku nad sítí.

b) Určete místo dopadu míčku v případě, že tenista odpálí míček rychlostí o velikosti $v_{02} = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

c) Určete velikost minimální počáteční rychlosti v_min míčku, při níž míček dopadne do soupeřova pole.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Odpor vzduchu zanedbejte. Míček považujte za hmotný bod.

3. Chlazení džusu

Chlazený nápoj získáme smícháním džusu a ledu. Teplota džusu je $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$, teplota ledu $t_2 = -18\ °\mathrm{C}$.

a) Určete hmotnost m ledu potřebnou k získání nápoje o hmotnosti $m_0 = 1{,}00$ kg a teplotě $t = 8\ °\mathrm{C}$. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

b) Najděte funkční závislost potřebné hmotnosti m ledu na konečné teplotě $t \in \langle 0\ °\mathrm{C}, 20\ °\mathrm{C} \rangle$ a sestrojte její graf. Potom totéž řešte pro případ počáteční teploty ledu $t_2' = 0\ °\mathrm{C}$.

c) Z grafů určete nejnižší možné konečné teploty nápoje, při nichž hmotnost ledu bude tvořit nejvýše 15 % hmotnosti nápoje.

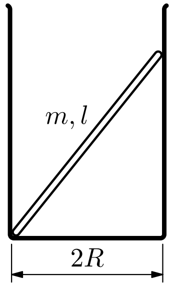
Měrná tepelná kapacita džusu je $c_1 = 4\,180\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, měrná tepelná kapacita ledu $c_2 = 2\,100\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_\mathrm{t} = 334 \cdot 10^3\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$. Tepelnou kapacitu nádoby zanedbejte.

4. Tyčinka v kádince

Do hladké vysoké kádinky s poloměrem $R = 4{,}0$ cm byla vložena tyčinka o hmotnosti $m = 16{,}0$ g dlouhá $l = 12{,}5$ cm.

a) Určete velikost N síly, kterou působil horní konec tyčinky na stěnu kádinky.

Pak byla do kádinky nalita voda o hustotě $\varrho_\mathrm{k} = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ do výšky $h = 8{,}0$ cm. Tyčinka zůstala ve stejné poloze a síla, kterou nyní působí na stěnu kádinky, má velikost $N_1 = 0{,}050$ N.



Obr. 1

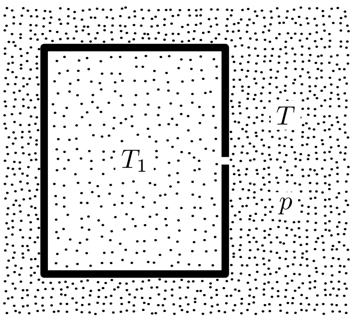
b) Určete hustotu ϱ materiálu tyčinky.

c) Určete velikost N_2 síly, kterou bude působit tyčinka na stěnu kádinky, když do kádinky dolejeme další vodu a celá tyčinka bude ponořena v kapalině.

Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty. Průměr tyčinky je v porovnání s průměrem kádinky zanedbatelný, smykové tření mezi tyčinkou a stěnou kádinky je zanedbatelné.

5. Plyn ve vyhřívané nádobě

Ve zředěném dusíku je umístěna uzavřená komora opatřená ve stěně malým otvorem (obr. 2). Dusík je natolik zředěn, že střední volná dráha molekul je mnohem větší než rozměry otvoru. V okolí nádoby má plyn termodynamickou teplotu T a tlak p. Vnitřek nádoby je vyhřát na termodynamickou teplotu $T_1 = 4T$. Termodynamická teplota uvnitř nádoby je trvale udržována na hodnotě $T_1 = 4T$.



Obr. 2

a) Porovnejte střední kvadratické rychlosti v_k, $v_{\mathrm{k}1}$ a hustoty N_V, $N_{\mathrm{V}1}$ molekul dusíku vně a uvnitř nádoby.

b) Určete tlak p_1 uvnitř nádoby.

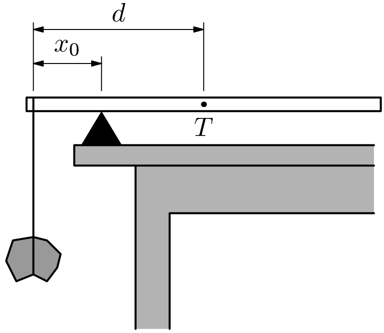
c) Porovnejte hustoty ϱ, ϱ_1 plynu vně a uvnitř nádoby.

6. *Praktická úloha*: **Měření hustoty tělesa**

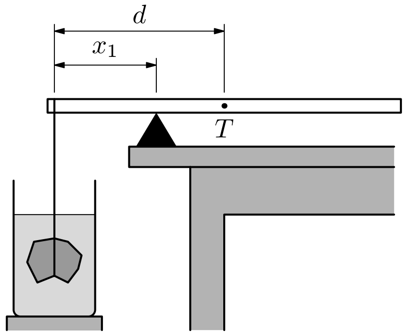
Větší křemenný oblázek zavěste na konec tyče obdélníkového průřezu o hmotnosti přibližně stejné nebo o málo menší, než je hmotnost oblázku, do vzdálenosti d od těžiště tyče, jehož polohu jste experimentálně určili a vyznačili. Na kraj stolu umístěte břit, tyč se zavěšeným tělesem na něj položte tak, aby byla vyvážená, a změřte vzdálenost x_0 břitu od bodu závěsu (obr. 3). Pak pod závěs umístěte nádobu s vodou tak, aby těleso bylo celé ponořeno a tyč posuňte, aby byla opět v rovnováze. Změřte novou vzdálenost x_1 bodu závěsu od břitu (obr. 4). Hustota ϱ tělesa je

$$\varrho = \varrho_1 \left(1 + \frac{x_0(d - x_1)}{d(x_1 - x_0)}\right), \tag{1}$$

kde ϱ_1 je hustota vody. Tu pro danou teplotu vody vyhledejte v tabulkách. (Použijte např. starší MFCh tabulky pro střední školy vydané SPN.)



Obr. 3



Obr. 4

Úkoly:

a) Odvoďte vzorec (1).

b) Proveďte měření veličin d, x_0, x_1 a výpočet podle vzorce 1.

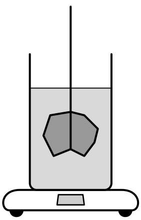
c) Odhadem můžeme stanovit směrodatnou odchylku změřených veličin jako ± 1 mm. Uvažte, jak musíme dosadit horní, resp. dolní meze změřených veličin do vzorce (1), abychom dostali horní a dolní mez vypočítané veličiny. Výpočet proveďte a zapište interval, ve kterém leží hustota měřeného tělesa.

d) Proveďte kontrolní měření podle obr. 5 a 6. Na digitální kuchyňskou váhu postavte nádobu s vodou a váhu vynulujte. Pak do nádoby zavěste měřené těleso – váha změří hmotnost m_1 vytlačené vody. Spustíte-li předmět na dno, váha změří hmotnost m tělesa. Hustota tělesa je

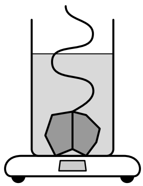
$$\varrho = \varrho_1 \frac{m}{m_1}.$$

Kuchyňská váha váží se směrodatnou odchylkou ± 1 g. Podobným způsobem jako v úkolu c) určete opět interval, ve kterém leží hustota tělesa. Oba intervaly porovnejte.

e) Výsledky, ke kterým jste dospěli, porovnejte s hodnotou uvedenou v tabulkách.



Obr. 5



Obr. 6

7. Automobil na dálnici

Automobil jede po dálnici, jejíž nadmořská výška se téměř nemění, stálou rychlostí. Při jízdě motor automobilu překonává odporovou sílu vzduchu; ostatní odporové síly považujte vzhledem k velikosti odporové síly vzduchu za zanedbatelné. Čelní příčný řez automobilu má obsah 2,4 m^2, hustota okolního vzduchu je 1,25 kg $\cdot$ m^{-3}, tvarový součinitel odporu automobilu je 0,36.

a) Sestrojte ve vhodném měřítku graf $F_\mathrm{o} = f(v)$ v intervalu rychlostí od 0 km $\cdot$ h^{-1} do 144 km $\cdot$ h^{-1}.

b) Stanovte velikost odporové síly, pokud by se automobil pohyboval po celé trase rychlostí 110 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ nebo 130 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Vypočtěte pro oba případy mechanickou práci při uražené vzdálenosti 100 km.
c) Určete spotřebu benzínu o výhřevnosti 33 $\mathrm{MJ \cdot l^{-1}}$ pro obě dvě rychlosti, je-li účinnost tepelně mechanického procesu 20 %. Kolik času řidič ušetří rychlejší jízdou?
d) V úloze a) až c) jsme neuvažovali valivý odpor, který ve skutečnosti není zanedbatelný. Určete spotřebu benzínu při jízdě automobilu rychlostmi 110 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a 130 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ se započítáním valivého odporu. Hmotnost automobilu je 1 500 kg, vnější průměr kola automobilu 55 cm, rameno valivého odporu $\xi = 0{,}002$ m.
e) V rámci ekonomizace automobilového provozu byla provedena úprava karosérie, a tím se zmenšil tvarový součinitel odporu na 0,30. Dále pak byla ještě provedena úprava motoru, a tím se zvýšila účinnost tepelně mechanického procesu na 24 %. Určete spotřebu benzínu při rychlostech 110 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a 130 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, a to tak, že uvedená zlepšení byla realizována nejprve postupně a pak obě najednou. Při řešení uvažujte i v tomto případě valivý odpor.

KATEGORIE D

1. Petr a Pavel

Petr a Pavel bydleli ve Lhotě. Petr potřeboval vrátit kolo kamarádovi do sousední vesnice Rovná. Pavel si chtěl zaběhat. Domluvili se, že oba vyrazí ve stejném okamžiku. Pavel jel na kole ze Lhoty do Rovné rychlostí 27 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Tam sesedl z kola a okamžitě se vracel zpět pěšky stálou rychlostí 5 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Petr stejnou trasu ze Lhoty do Rovné a zpět proběhl stálou rychlostí 9 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

a) Kdo se vrátil do Lhoty dříve? Zdůvodněte.
b) Sestrojte graf závislosti vzdálenosti d každého chlapce od Lhoty na čase t za předpokladu, že Petrova jízda na kole trvala 10 minut. Z grafu určete časy a vzdálenosti od Lhoty, kde se míjeli.

2. Oktávie a Felicie

Na světelné křižovatce stojí těsně za sebou Oktávie a Felicie. Po rozsvícení zeleného světla se Oktávie rozjela rovnoměrně zrychleným pohybem, v čase 8 s dosáhla rychlosti 54 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a touto rychlostí se pohybovala dále. Felicie se rozjela se zpožděním 2 s za Oktávií se stejným zrychlením a po rozjezdu se za ní pohybovala stejnou rychlostí. V čase 20 s od začátku pohybu Oktávie začala obě auta brzdit tak, že jejich pohyb byl rovnoměrně zpomalený, přičemž velikost zrychlení Oktávie byla 2,5 m·s^{-2}. Felicie zastavila těsně za Oktávií jako na předchozí křižovatce.

a) Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti rychlosti na čase obou automobilů.
b) Z grafů určete uraženou dráhu s mezi křižovatkami, vzdálenost d mezi vozidly během rovnoměrného pohybu, velikost a_1 zrychlení Felicie při rozjíždění a velikost a_2 zrychlení Felicie při zastavování.

3. Curling

Hráč curlingu poslal po ledě kámen a ten se zastavil v terči po proběhnutí dráhy $s = 28{,}0$ m za dobu $t_1 = 25{,}0$ s. Soupeř poslal kámen ze stejného místa tak, že za dobu $t_2 = 10{,}0$ s stojící kámen vyrazil.

a) Určete velikost v_{01} počáteční rychlosti prvního kamene.
b) Určete u druhého kamene velikost v_{02} počáteční rychlosti a velikost v_2 konečné rychlosti bezprostředně před nárazem.
c) Určete součinitel f smykového tření mezi kamenem a ledovou plochou.

Rozměry kamene vzhledem k uražené dráze považujte za zanedbatelné. Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

4. Vagóny

Vagón o hmotnosti $m_1 = 35$ t roztlačený lokomotivou se pohybuje rychlostí $v_1 = 2{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a narazí do stojícího zabrzděného vagónu o hmotnosti $m_2 = 25$ t. Po nárazu se vagóny automaticky spojí. Součinitel smykového tření mezi koly a kolejnicemi je $f = 0{,}15$.

a) Určete brzdnou dráhu soupravy obou spojených vagónů.
b) Určete velikost síly $\boldsymbol{F}_1$, kterou během brzdění působí druhý vagón (hmotnost m_2) na první (hmotnost m_1), a velikost síly $\boldsymbol{F}_2$, kterou během brzdění působí první vagón na druhý.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

5. Autodráha

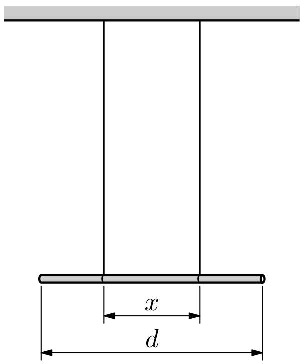
Součástí autodráhy je kruhová smyčka (tzv. looping), kterou autíčko o hmotnosti $m = 200$ g projíždí. Během průjezdu smyčkou opisuje těžiště autíčka kružnici o poloměru $r = 16$ cm ve svislé rovině, doba průjezdu smyčkou je $t_0 = 0{,}70$ s. Autíčko má elektrický pohon a projíždí smyčkou rovnoměrným pohybem.

a) Určete velikost síly $\boldsymbol{F}_1$, kterou je autíčko přitlačováno k autodráze v nejvyšším bodě trajektorie.
b) Určete velikost síly $\boldsymbol{F}_2$, kterou je autíčko přitlačováno k autodráze v okamžiku, kdy urazilo jednu čtvrtinu smyčky.
c) Určete velikost síly $\boldsymbol{F}_3$, kterou je autíčko přitlačováno k autodráze v čase $t_1 = 0{,}13$ s od vjezdu do smyčky.
d) Určete průměrný výkon P během výstupu z nejnižšího do nejvyššího bodu smyčky.
e) Určete maximální okamžitý výkon P_{max} během stoupání ve smyčce.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

6. *Praktická úloha*: **Studium funkční závislosti**

Homogenní tyč délky d zavěsíme souměrně na vzájemně rovnoběžná vlákna zanedbatelné hmotnosti do vodorovné polohy (obr. 1) a nepatrně vychýlíme otočením kolem svislé osy. Po uvolnění bude tyč konat rotační kmity.



Obr. 1

Úkol:

Zjistěte experimentálně funkční závislost frekvence f rotačních kmitů vodorovné tyče na vzájemné vzdálenosti x rovnoběžných vláken.

Pomůcky:

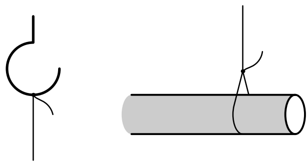
Závitová tyč délky 20 až 30 cm (průměr 6 až 10 mm) – lze zakoupit v železářství, stativ, vlákna, stopky.

Návod a poznámky:

a) Frekvence f měřená v jednotce Hz je počet kmitů tyče za 1 s. Perioda T kmitů je doba, za kterou se tyč vrátí do původní polohy. Platí $f = 1/T$.

b) Vlákno uvažte na háčky posunutelné po vodorovné tyči stativu nebo jej přímo na tyč stativu přivažte tak, aby při kmitech uzlík pod tyčí stativu zůstal v klidu, ale aby bylo možno při změně vzdálenosti vláken očko po tyči stativu snadno posunovat. Na dolním konci vlákna udělejte volnější očko, aby se poloha očka na závitové tyči dala snadno měnit (obr. 2). Délku vláken volte aspoň 5krát větší, než je délka tyče.

c) Kmity tyče jsou při malých úhlových výchylkách harmonické. To kromě jiného znamená, že perioda kmitů pro malé výchylky prakticky na výchylce nezávisí. Při větších výchylkách se perioda poněkud prodlužuje. Proto při měření nechte kmitat tyč s co nejmenší úhlovou výchylkou.



Obr. 2

d) Vzdálenost x vláken měňte od maximální možné vzdálenosti d do nejmenší, pro kterou půjde perioda ještě měřit, a to tak, abyste získali 8 až 10 různých hodnot x. Výsledky měření zapisujte do tabulky. Dobu např. 10 period měřte dvakrát a počítejte s aritmetickým průměrem.

č. měření	$\frac{x}{\text{cm}}$	$\frac{10T_1}{\text{s}}$	$\frac{10T_2}{\text{s}}$	$\frac{T}{\text{s}}$	$\frac{f}{\text{Hz}}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

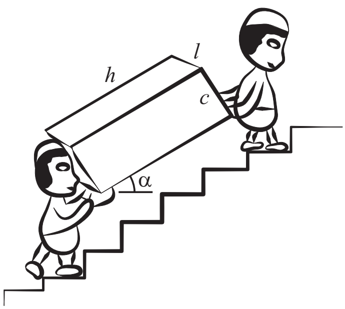
e) Sestrojte graf závislosti frekvence f kmitů na vzdálenosti x vláken. Graf vytvořte počítačem (např. v Excelu), nebo ručně na milimetrový papír. V případě Excelu si vytvořte tabulku jako v návodu, zapište do ní naměřené údaje a ve zbývajících sloupcích proveďte výpočty pomocí vložené funkce. Kurzorem označte dvojici sloupců x a f s daty a vložte *Graf*. Volte typ grafu *XY bodový*, podtyp *bodový* (tj. bez spojnic datových bodů) – zobrazí se soustava izolovaných bodů. Po kliknutí pravým tlačítkem myši na libovolný z nich zvolte z nabídky *Přidat spojnici trendu* a dále vyberte vhodný *Typ trendu a regrese*. Tím se zobrazí plynulá křivka nebo přímka, která proloží zobrazené body v grafu. Zobrazte též *Rovnici regrese*, tj. rovnici získané křivky nebo přímky.

f) Zformulujte závěr.

7. Stěhováci

Při stěhování nábytku nesou nosiči skříň do schodů. Skříň má vnější rozměry $l = 80$ cm, $c = 60$ cm a $h = 120$ cm (obr. 3). Je vyrobena z dubového dřeva o hustotě $\varrho = 800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Desky, ze kterých je skříň vyrobena (včetně zadní), mají tloušťku $t = 2$ cm. Přední a zadní stěna skříně svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 30°$.

a) Určete hmotnost skříně.
b) Určete velikosti sil, kterými musí nosiči působit na skříň, aby ji unesli.
c) Uvažujte, že dole ponesou skříň dva nosiči a nahoře jeden. Jaký by musel být úhel α, aby zatížení bylo pro všechny nosiče stejně velké?



Obr. 3

Při řešení úloh b), c) předpokládejte, že nosiči působí na skříň směrem svisle vzhůru.