Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 2, 57–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146364

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2010

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

NAŠE SOUTĚŽ

V předchozím ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika Naše soutěž. V každém čísle byly vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální.

V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulý i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude periodicky (ročně) zaslána matematická literatura.

Nyní tedy předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. srpna 2010* na adresu redakce.

Úloha 11. Je dán obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB| = a$, $|BC| = b$. Zvolíme libovolně bod P uvnitř trojúhelníku ACD a vedeme jím rovnoběžky se stranami obdélníku $ABCD$. Rovnoběžka se stranou AB protne úhlopříčku AC v bodě K a stranu BC v bodě L, rovnoběžka se stranou BC protne úhlopříčku AC v bodě M a stranu AB v bodě N. Najděte množinu všech bodů P, pro něž je součet obsahů trojúhelníků ANM a KLC roven obsahu trojúhelníku MKP. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 12. *Posunutí pístu.* Ve svislé válcové nádobě se pod pístem o hmotnosti $m_1 = 50$ kg a plošném obsahu $S = 100\ \mathrm{cm}^2$ nachází vzduch o teplotě $t_1 = 7°\mathrm{C}$. Na počátku se píst nachází ve výšce $h_0 = 60$ cm od dna nádoby. Vzduch v nádobě zahřejeme na teplotu t_2 a na píst položíme závaží o hmotnosti m_2. Hodnota atmosférického tlaku je $p_0 = 100$ kPa. Určete, o kolik centimetrů se posune píst vzhledem k původní poloze. Vzduch považujte za ideální plyn, tření pístu o stěny nádoby zanedbejte. Úlohu řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty ($g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$):

a) $t_2 = 47°\mathrm{C}$, $m_2 = 100$ kg; b) $t_2 = 67°\mathrm{C}$, $m_2 = 10$ kg.

(*Lubomír Konrád*)

Řešení úloh z čísla 4/2009

Úloha 7. Hru hrají dva hráči. První hráč zahájí hru hodem kostky (používá se klasická kostka, součet ok na protilehlých stěnách je 7). Po úvodním hodu se již kostkou nehází, ale hráč, který je na tahu, pouze kostku přetočí na některou sousední stěnu. Součty ok (včetně úvodního hodu) na horní stěně se sčítají. Hráč, který svým tahem přesáhne součet 21, prohrává. S jakou pravděpodobností vyhraje první hráč, který hází kostkou?

Hra může probíhat např. takto: První hráč hodí číslo 6, druhý hráč přetočí kostku na číslo 5 (součet je 11), první hráč přetočí opět kostku na číslo 6 (součet je 17) a druhý hráč přetočí kostku na číslo 4 (součet je 21). Znamená to, že první hráč prohrává, neboť po dalším přetočení kostky bude součet již větší než 21. (*Antonín Jančařík*)

Řešení: V tabulce jsou všechny dosažitelné pozice ve hře, číslo sloupce udává aktuální součet, číslo řádku počet ok na horní straně kostky. V pozicích označených V vyhraje hráč, který je na tahu, v pozicích označených P prohraje.

Po úvodním hodu nastávají 4 pozice označené V a pouze dvě označené P. Je tedy lepší být až druhý a úvodní hod přenechat protivníkovi.

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	P	P	V	V	V	V	V	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V	P	V	V	V
2	P	V	V	V	V	P	V	V	V	P	V	V	V	V	P	V	V	V	P	V	V	V
3	P	V	V	P	P	V	V	V	P	P	V	V	P	P	V	V	V	P	P	V	V	P
4	P	V	V	P	P	V	V	V	P	P	V	V	P	P	V	V	V	P	P	V	V	P
5	P	V	V	V	V	P	V	V	V	P	V	V	V	V	P	V	V	V	P	V	V	V
6	P	P	V	V	V	V	V	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V	P	V	V	V

Při vyplňování tabulky postupujeme zleva doprava. Pro ohodnocení aktuální pozice použijeme hodnocení všech pozic, do kterých se lze z aktuální pozice dostat. Protože jsou tyto pozice nalevo od aktuální pozice, jsou vždy vyplněné (všechny pozice nalevo od sloupce 21 chápeme jako vyhrané). Pokud je mezi dosažitelnými pozicemi pozice prohraná, označíme aktuální pozici jako vyhranou, v opačném případě označíme aktuální pozici jako prohranou.

Vítězná strategie spočívá v provádění tahů, které vedou do prohraných pozic (z pohledu protivníka). Například v pozici, kdy je aktuální součet 13 a na horní straně kostky je pět ok, přetočíme kostku čtyřmi oky nahoru a uvedeme protivníka do prohrané pozice (17; 4).

Úloha 8. Neopatrný chlapec upustil z balkónu, který je ve výšce 3 m nad zemí, na chodník malý míček – hopík. Po dopadu na chodník míček vyskočil do $\frac{2}{3}$ původní výšky, pak opět padal na chodník volným pádem a celý pohyb se znovu opakoval. Určete,

a) do jaké výšky hopík vyskočí po pátém odrazu,
b) za jak dlouho od okamžiku upuštění na zem dopadne pošesté,
c) jaký je poměr rychlostí při pátém a prvním dopadu na zem,
d) jakou dráhu míček urazí, než se jeho pohyb utlumí.

Chlapec dále přemýšlel, jak zařídit, aby míček po prvním odrazu vyskočil zpátky do téže výšky, z níž padal.

e) Vysvětlete, zda je to možné, a na základě udaných hodnot určete hledanou veličinu.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané číselné hodnoty. Odpor prostředí v průběhu pohybu míčku zanedbejte. Tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

(Ivo Volf)

Řešení: a) Označme h_0 počáteční výšku míčku. Po 1. odrazu vyskočí míček do výšky $h_1 = \frac{2}{3}h_0$, po 2. odrazu do výšky $h_2 = \frac{2}{3}h_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 h_0$ atd., po 5. odrazu do výšky $h_5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 h_0 \doteq 0{,}4$ m.

b) Doba pádu míčku z výšky h_0 je

$$T_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

po prvním odrazu vystoupí míček do výšky h_1 za dobu

$$T_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{2}{3}h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,T_0$$

a stejnou dobu padá zpět dolů volným pádem. Analogickým postupem můžeme psát, že po druhém odrazu je doba výstupu $T_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 T_0$ a po pátém odrazu je doba výstupu $T_5 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^5 T_0$. Celková doba pak je

$$\begin{aligned} T &= T_0 + 2T_1 + 2T_2 + \cdots + 2T_5 = \\ &= T_0 + 2\left[\sqrt{\frac{2}{3}} + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^5\right] T_0, \end{aligned}$$

což lze přepsat do tvaru

$$T = T_0 + 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^5}{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}\, T_0 \doteq 6{,}7 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \doteq 4{,}4 \text{ s}.$$

c) Velikost rychlosti v okamžiku prvního dopadu je $v_1 = \sqrt{2h_0 g}$, při pátém dopadu je

$$v_5 = \sqrt{2h_4 g} = \sqrt{2g \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 h_0} = \frac{2}{3} v_1.$$

Hledaný poměr je tedy $\frac{v_5}{v_1} = \frac{2}{3} \doteq 0{,}7$.

d) Celkovou uraženou dráhu je možno spočítat jako součet nekonečné geometrické řady, tj.

$$s = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \ldots = h_0 + 2 \cdot \left[\frac{2}{3} h_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 h_0 + \ldots\right],$$

což po úpravě je

$$s = h_0 + 2 \cdot h_0 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5\, h_0 = 15 \text{ m}.$$

e) Chlapec hodil míček směrem svisle dolů rychlostí o velikosti v_0. Pokud by míček padal dolů volným pádem, vyskočil by po odrazu do výšky $\frac{2}{3} h_0$. Aby vyskočil opět do výšky h_0, je třeba mu ještě dodat energii, a to ve formě energie kinetické hned na počátku pohybu. Ze zákona zachování mechanické energie platí

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mg \cdot \frac{1}{3} h_0,$$

z čehož

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{3} g h_0} \doteq 4{,}43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Stav soutěže po 8 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (Gymnázium Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů