Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Několik jednoduchých úloh využívajících obarvení

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 2, 49–52

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146362

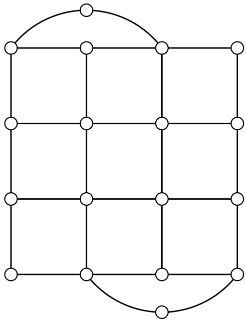
Několik jednoduchých úloh využívajících obarvení

Emil Calda, MFF UK Praha

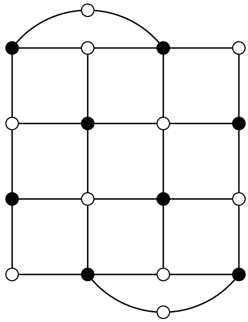
Abstract. The article presents five examples of proofs using colouring.

Řešení následujících pěti úloh je založeno na tom, že dané objekty si představíme vhodným způsobem obarvené. Stojí přitom za povšimnutí, jak pouhá představa obarvení může při řešení daných úloh pomoci.

Úloha 1. Na obr. 1 je schematicky zobrazena silniční síť, kterou je propojeno osmnáct měst znázorněných kroužky. Najděte město, které je východiskem trasy, na níž je každé ze zbývajících sedmnácti měst právě jednou.



Obr. 1



Obr. 2

Řešení: Pokuste se nejprve takové město najít sami a teprve, když se vám to ani po několika pokusech nepodaří, zkuste dokázat, že v dané síti město s uvedenou vlastností neexistuje.

K důkazu tohoto tvrzení si všechny kroužky v této síti představíme obarvené střídavě bílou a černou barvou podle obr. 2 a budeme předpokládat, že město dané vlastnosti existuje. Je-li kroužek příslušný výchozímu městu obarvený černě, dostaneme pro postupně navštívená města osmnáctičlennou posloupnost

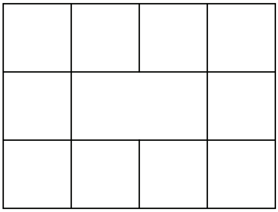
č, b, č, b, č, b, č, b, č, b, č, b, č, b, č, b, č, b;

je-li kroužek příslušný výchozímu městu bílý, má osmnáctičlenná posloupnost postupně navštívených měst tvar

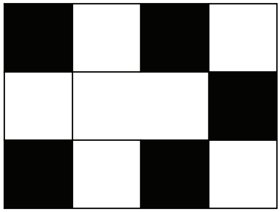
b, č, b, č, b, č, b, č, b, č, b, č, b, č, b, č, b, č.

V obou těchto posloupnostech je devět kroužků černých a devět bílých, což je ve sporu s tím, že v dané silniční síti je černých kroužků osm a bílých deset. Znamená to, že takovéto posloupnosti nelze sestavit, takže město, které by bylo výchozím bodem uvedené trasy, neexistuje.

Úloha 2. Na každé z deseti čtvercových políček obrazce znázorněného na obr. 3 položte korunovou minci. Vezměte libovolné dvě z nich a přemístěte jednu ve směru a druhou proti směru otáčení hodinových ručiček, obě o stejný počet políček. Zjistěte, zda je možné po určitém počtu těchto kroků dojít k tomu, že všech deset mincí bude na jednom políčku.



Obr. 3



Obr. 4

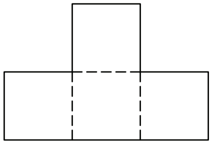
Řešení: Představme si, že všechna políčka jsou střídavě podle obr. 4 obarvena bílou a černou barvou, a označme p počet mincí, které jsou na všech bílých políčkách po každém přemístění dvou mincí. Před tím, než začneme mince přemisťovat, je tedy $p = 5$; máme zjistit, zda je možné dosáhnout toho, aby všechny mince byly na jednom políčku, tj. aby $p = 0$, budou-li všechny na černém, anebo aby $p = 10$, budou-li všechny na políčku bílém. Protože obě mince přemisťujeme o stejný počet políček, mohou při jejich přemístění nastat pouze tyto možnosti:

- obě mince přejdou z políček bílé barvy na políčka barvy černé a p se zmenší o dvě;
- obě mince přejdou z políček bílé barvy na políčka barvy bílé a p se nezmění;
- obě mince přejdou z políček barvy černé na políčka barvy bílé a p se zvětší o dvě;
- obě mince přejdou z políček barvy černé na políčka barvy černé a p se nezmění;
- obě mince přejdou z políček různé barvy na políčka různé barvy a p se nezmění.

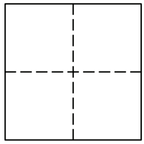
Nyní už je zřejmé, že případ $p = 0$ ani $p = 10$ nemůže nastat; číslo p, které bylo na počátku liché, nemůže se uvedenými změnami „dopracovat“

k tomu, aby bylo sudé! Uvedeným postupem nelze tedy dosáhnout toho, aby všechny mince byly na jednom políčku.

Úloha 3. Šachovnice 8×8 se má pokrýt patnácti obrazci, které jsou složeny ze čtyř čtverečků na obr. 5 shodných s políčky šachovnice a jednoho čtverce na obr. 6 složeného ze čtyř těchto čtverečků. Dokažte, že to není možné.



Obr. 5

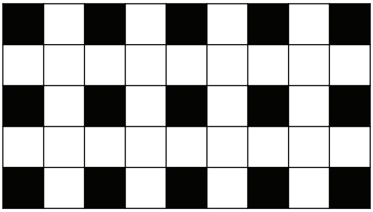


Obr. 6

Řešení: Využijeme toho, že políčka šachovnice jsou už obvyklým způsobem obarvena, takže je na ní 32 bílých a 32 černých políček, a budeme předpokládat, že je uvedenými šestnácti obrazci pokryta. Protože každý z patnácti obrazců na obr. 5 zakrývá buď jedno anebo tři černá políčka, je počet černých políček zakrytých všemi patnácti těmito obrazci liché číslo. A protože čtverec na obr. 6 zakrývá, ať leží na dané šachovnici kdekoli, právě dvě černá políčka, je celkový počet černých políček zakrytých všemi šestnácti obrazci opět číslo liché. To je však nemožné, protože na pokryté šachovnici je všech černých políček třicet dva. Znamená to, že uvedeným počtem daných obrazců nelze šachovnici 8×8 pokrýt.

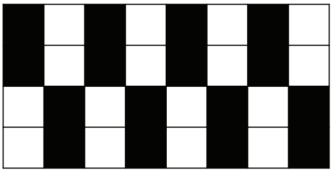
Úloha 4. V obdélníkové chodbě vydlážděné dlaždicemi o rozměrech 2×2 a 4×1 je nutné vyměnit jednu poškozenou dlaždici. K dispozici je však pouze jediná dlaždice, která je navíc „opačného typu“ než dlaždice určená k výměně. Je zřejmé, že dlažbu nelze opravit tak, že na místo poškozené dlaždice vložíme novou a ostatní ponecháme na místě. Ukažte, že neexistuje ani žádný jiný způsob, kterým by bylo možné chodbu „předláždit“ původními dlaždicemi tak, že poškozená dlaždice je nahrazena dlaždicí „opačného typu“.

Řešení: Představme si, že dlaždice vydlážděné chodby zakrývají čtverečky 1×1 obarvené podle obr. 7. Pod každou dlaždicí 2×2 je vždy jediný černý a tři bílé čtverečky, pod každou dlaždicí 4×1 jsou vždy dva černé a dva bílé anebo žádný černý a čtyři bílé. Odstraníme-li dlaždici 2×2, pak při jakémkoli rozmístění zbývajících dlaždic zůstane nezakryto právě jedno černé a tři bílá políčka; tato čtyři políčka nelze dlaždicí 4×1 zakrýt. Odstraníme-li dlaždici 4×1, zůstanou nezakryta dvě černá a dvě bílá políčka, anebo čtyři bílá; v obou případech se tato čtyři políčka nedají dlaždicí 2×2 zakrýt. Uvedenou výměnou dlaždic proto nelze uvažovanou čtvercovou síť pokrýt; znamená to, že chodbu po nahrazení poškozené dlaždice dlaždicí „opačného typu“ nelze žádným způsobem „předláždit“.



Obr. 7

Úloha 5. Po šachovnici 4×8 polí pohybujeme jezdcem ♘. Je možné provést 32 tahů tak, aby jezdec prošel všechna pole šachovnice a aby se posledním tahem vrátil tam, kde začal?



Obr. 8

Řešení: Šachovnici požadovaným způsobem projít nelze. K důkazu obarvíme šachovnici bílou a černou barvou podle obr. 8. Na bílé pole v 1. nebo 4. řadě se jezdec může dostat jen z bílého pole ve 2. nebo 3. řadě a z bílého pole v 1. nebo 4. řadě se jezdec dostane jen na bílé pole ve 2. nebo 3. řadě. Aby se tedy jezdec dostal z bílých polí ve 2. nebo 3. řadě na všechna bílá pole v 1. nebo 4. řadě, nemůže nikdy skočit na černé pole.

Literatura

[1] Calda, E.: Pokrývání šachovnice. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, **80**, č. 2 (2005), s. 16–20.

[2] Calda, E.: Pár jednoduchých úloh o šachovnici. *Matematika–fyzika–informatika*, **6**, č. 3 (1996), s. 127–131.

[3] Zhouf, J. a kol.: *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů.* Prometheus, Praha, 2006, s. 115, 268.