Velimír Dvořák

Nad Archimedovým výpočtem čísla π

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 2, 6–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146356

Nad Archimedovým výpočtem čísla π

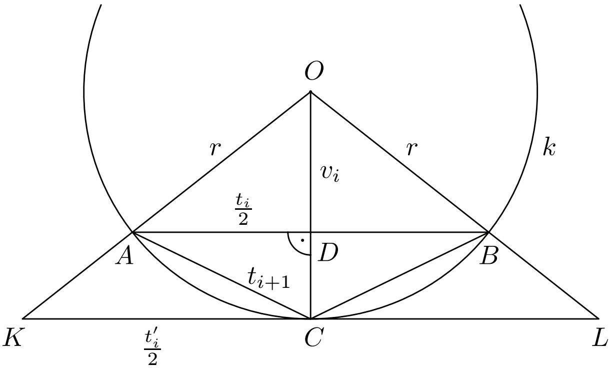
Velimír Dvořák, Proseč

Abstract. The article follows up to the article [1] as it deals with Archimedes' method of determining the value of pi. The author presents his own method based on an iterative process and shows several approximations of the value of pi. The author also points out that the computations made by calculator may misrepresent the last decimal digits of the calculated value.

Když jsem v 1. čísle Rozhledů ročníku 2005 na straně 6 uviděl nadpis „Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků“, hned jsem se dal do čtení. Nějaký čas předtím jsem totiž někde četl o Archimedově výpočtu, ale bez uvedení způsobu. Přemýšlel jsem tehdy o tom, jak to Archimedes asi počítal, a udělal jsem si nějaké výpočty. Nyní jsem byl překvapen použitím geometrického a zejména harmonického průměru. Autor článku doc. Šimša položil otázku, jak bychom to dělali dnes. Přišlo mi to jako výzva, a tak jsem se k věci vrátil a vytvořil svůj výpočetní postup.

Pro zdůvodnění mých úvah je třeba něco připomenout. Pravidelný n-úhelník se skládá z n rovnoramenných trojúhelníků, jejichž ramena jsou poloměry kružnice mnohoúhelníku opsané a základna je tětivou této kružnice. Rozpůlením oblouků nad těmito tětivami se dostaneme k dalšímu pravidelnému mnohoúhelníku o dvojnásobném počtu stran, tedy od n-úhelníku k $2n$-úhelníku. Délka jeho strany se přiblíží délce oblouku, obvod mnohoúhelníku, který je n-násobkem délky strany, se přiblíží délce kružnice, tedy číslu 2π, pokud má kružnice poloměr rovný jedné. Délku strany $2n$-úhelníku můžeme pomocí vztahů v rovnoramenném trojúhelníku vypočítat z velikosti stran předchozího n-úhelníku. Stejným postupem, stejným algoritmem, můžeme přejít k dalšímu pravidelnému mnohoúhelníku, který bude mít opět dvojnásobný počet stran a jeho obvod se opět přiblíží délce opsané kružnice, jen za výchozí délku strany budeme brát délku vypočítanou v předchozím výpočtu. Opakujeme tedy týž výpočet – jeden krok opět a opět v dalších krocích. Je to tedy příklad iterační metody („opět“ se říká v latině iterum), která je velmi důležitá v současné aplikované matematice a v technice. Jako výchozí n-úhelník zvolíme ovšem takový, v němž umíme snadno určit délku strany z poloměru kružnice opsané. V záznamu výpočtu musíme zapisovat, o kolikátý krok jde, což vyjádříme indexem i.

Část n-úhelníku je rovnoramenný trojúhelník OAB s rameny OA a OB a základnou AB (obr. 1). Bod C dělí oblouk AB na dva stejné oblouky a rameno OC dělí úhel AOB na dva stejné úhly AOC a BOC. Bod D, průsečík strany AB a poloměru OC, je v trojúhelníku OAB patou výšky z vrcholu O na základnu AB, úhly ODA a ODB jsou pravé. Označme $|OD| = v_i$, $|AB| = t_i$, $|AC| = |BC| = t_{i+1}$ (strana $2n$-úhelníku). Volbou poloměru $r = |OA| = |OB| = |OC| = 1$ kružnice k zjednodušíme výpočet i zápis a získáme bez dalšího dělení číslem r přibližnou hodnotu, dolní odhad pro 2π, tedy i pro π.



Obr. 1

Z Pythagorovy věty pro trojúhelníky ODA a ODB plyne

$$|OD|^2 + |AD|^2 = |OA|^2, \quad \text{resp.} \quad |OD|^2 + |BD|^2 = |OB|^2,$$

tedy $v_i = \sqrt{1 - \left(\frac{t_i}{2}\right)^2}$. Ve shodných pravoúhlých trojúhelnících ADC a BDC je $|DC| = 1 - v_i$ a platí:

$$t_{i+1}^2 = \left(\frac{t_i}{2}\right)^2 + (1 - v_i)^2 = \left(\frac{t_i}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{t_i}{2}\right)^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{t_i}{2}\right)^2 + 1 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{t_i}{2}\right)^2} + 1 - \left(\frac{t_i}{2}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{t_i}{2}\right)^2}$$

Dostáváme tak

$$t_{i+1} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{t_i}{2}\right)^2}},$$

což je celkem jednoduchý výpočetní vztah. Vyjadřuje délku t_{i+1} strany $2n$-úhelníku pomocí délky t_i strany příslušného n-úhelníku.

Nyní musíme ještě zvolit počáteční hodnotu t_1. U šestiúhelníku je to nejjednodušší, protože výchozí trojúhelník je rovnostranný, takže máme $t_1 = r = 1$, u čtyřúhelníku, tedy u čtverce, je $t_1 = \sqrt{2}$, u trojúhelníku je $t_1 = \sqrt{3}$. Víme také, že strana desetiúhelníku je $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tedy $t_1 \doteq 0{,}618\,033\,9$.

Abychom získali i horní odhad čísla π, s kterým pracuje Archimédes, uvažujme i pravidelný n-úhelník jednotkové kružnici opsaný, jehož vrchol K leží na polopřímce OA, vrchol L na polopřímce OB a bod C je bodem dotyku jeho strany KL a kružnice k jemu vepsané (obr. 1). Strana KL je rovnoběžná se stranou AB. Označme $|KL| = t'_i$. Trojúhelníky OAB a OKL jsou stejnolehlé a platí

$$\frac{v_i}{\frac{t_i}{2}} = \frac{|OC|}{\frac{t'_i}{2}},$$

tedy při $|OC| = 1$ je $t'_i = \frac{t_i}{v_i}$. Obvod opsaného n-úhelníku $o'_i = nt'_i$ je horním odhadem pro délku opsané kružnice, takže

$$\frac{o'_i}{2} = \frac{nt'_i}{2} = \pi'_i$$

je horním odhadem pro číslo π.

Vzorec pro obsah kruhu $S = \pi r^2$ umožňuje přiblížit číslo π také výpočtem obsahů vepsaného i opsaného mnohoúhelníku:

- u vepsaného n-úhelníku je $S_{\mathrm{v}} = n \cdot \frac{v_i t_i}{2}$ (dolní odhad pro číslo π);
- u opsaného n-úhelníku je $S_{\mathrm{o}} = n \cdot \frac{1 \cdot t'_i}{2}$ (horní odhad pro číslo π).

Všechny čtyři výpočty pracují se stejnými veličinami a můžeme je zapisovat do jedné tabulky. K výpočtu je možné použít jen obyčejnou kalkulačku. Jejich osm míst stačí k ověření výsledků, které zde otiskujeme.

Když vyjdeme z $t_1 = 1$ odpovídající šestiúhelníku, dostaneme tabulku:

1	i	1	2	3	4	5	6	7
2	2^{i-1}	1	2	4	8	16	32	64
3	$6{,}2 \cdot 2^{i-1} = n$	6	12	24	48	96	192	384
4	$\|AB\| = t_i$	1	0,5176381	0,2610523	0,1308158	0,0654384	0,0327231	0,0163645
5	$nt_i = o_i$	6	6,2116560	6,2658552	6,2786784	6,2820864	6,2828352	6,2839680
6	$\frac{o_i}{2} = \pi$	3	3,1058286	3,1326276	3,1396692	3,1410432	3,1414176	3,1419840
7	$\frac{t_i}{2}$	0,5	0,2588195	0,1305261	0,0654029	0,0327192	0,0163615	0,0081823
8	$\left(\frac{t_i}{2}\right)^2$	0,25	0,0339873	0,0170371	0,0042775	0,0010705	0,0002677	0,0000669
9	$1 \left(\frac{t_i}{2}\right)^2 = u$	0,75	0,9330127	0,9829689	0,9957225	0,9989295	0,9997323	0,9999331
10	$\sqrt{u} = v_i$	0,8660254	0,9659258	0,9914449	0,9978589	0,9994646	0,9998681	0,9999665
11	$\frac{t_i}{v_i} = t'_i$	1,1547005	0,5358984	0,2633048	0,1310864	0,0654734	0,0327275	0,0163648
12	$nt'_i = o'_i$	6,9282030	6,4327808	6,3193152	6,2921472	6,2854464	6,2836608	6,284 0832
13	$o'_i = \pi'$	3,4641015	3,2153904	3,1596876	3,1460736	3,1427232	3,1418304	3,1420416
14	$\frac{v_i t_i}{2} = o_i$	0,4330127	0,2500000	0,1316524	0,0655432	0,0327367	0,0163594	0,0081821
15	$no_i = \pi$	2,5980762	3,0000000	3,1596576	3,1460736	3,1427232	3,141 0065	3,1419264
16	$1 - v_i$	0,1339746	0,0340742	0,0085551	0,0021411	0,0005354	0,0001339	0,0000335
17	$\sqrt{1 - v_i}$	0,3660254	0,1845991	0,0924987	0,0462720	0,0231387	0,0115715	0,0057879
18	$\sqrt{2}\sqrt{1 - v_i} = t_{i+1}$	0,5176381	0,2610573	0,1308158	0,0654384	0,0327231	0,0163645	0,0081854

V každém sloupci číslo z řádku 18 přepíšeme do řádku 4 pravého sousedního sloupce jako počáteční hodnotou pro vypočet v dalším kroku. To je podstata iterační metody.

Srovnáním získaných hodnot s hodnotami v Šimšově článku vidíme shodu až na některá poslední místa. Kalkulačka pracuje s pevnou desetinnou čárkou, u některých veličin se zmenšuje počet platných míst. Snižuje se tak přesnost výpočtu na posledních místech, tak nutně po určitém počtu kroků už výsledek není použitelný. Zde je to pro $i = 7$, takže končíme u $i = 6$ a $n = 192$. Podobně je tomu při výpočtu z výchozího čtverce, kde pro dolní odhad z obvodu pro $i = 6$ a $n = 128$ vychází $\pi \doteq 3{,}141\,337\,6$, ale pro $i = 7$ a $n = 256$ je $\pi \doteq 3{,}141\,606\,4$. Vlastnosti skromného výpočetního prostředku určily konec výpočtu a vybízejí zájemce obrátit se k počítači.

L i t e r a t u r a

[1] Šimša, J.: Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků, 1. část. *Rozhledy matematicko-fyzikální* **80**, č. 1, (2005), str. 6–14.

Číslo e v tvare nekonečného súčinu

Vladimír Strečko, FHPV, Prešovská univerzita, Prešov

Abstract. The article describes a method of defining the Euler's number e by an infinite product. The limit representing the infinite product is determined by a definite integral. An approximation of the numerical value of e is given by a product of a finite number of factors.

Tento príspevok vznikol motiváciou článkom [1] v časopise MFI.

Na stredných školách sa študenti na hodinách matematiky oboznamujú s logaritmami, exponenciálnymi, logaritmickými funkciami a niektorí si osvojujú základy infinitezimálneho počtu. Eulerovo číslo e sa zavádza buď ako limita funkcie alebo ako súčet nekonečného radu,

$$\mathrm{e} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \text{resp.} \quad \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Cieľom príspevku je sprístupniť čitateľovi, ako možno vyjadriť číslo e