Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 4, 54–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146335

NAŠE SOUTĚŽ

V prvních třech číslech letošního ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika *Naše soutěž*. Byly tam vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální.

V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů budou sčítat a povede se průběžná výsledková listina. V listině se nebudou rozlišovat úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům se bude periodicky zasílat matematická, případně fyzikální literatura.

Nyní tedy předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *28. února 2010* na adresu redakce.

Úloha 7. Hru hrají dva hráči. První hráč zahájí hru hodem kostky (používá se klasická kostka, součet ok na protilehlých stěnách je 7). Po úvodním hodu se již kostkou nehází, ale hráč, který je na tahu, pouze kostku přetočí na některou sousední stěnu. Součty ok (včetně úvodního hodu) na horní stěně se sčítají. Hráč, který svým tahem přesáhne součet 21, prohrává. S jakou pravděpodobností vyhraje první hráč, který hází kostkou?

Hra může probíhat např. takto: První hráč hodí číslo 6, druhý hráč přetočí kostku na číslo 5 (součet je 11), první hráč přetočí opět kostku na číslo 6 (součet je 17) a druhý hráč přetočí kostku na číslo 4 (součet je 21). Znamená to, že první hráč prohrává, neboť po dalším přetočení kostky bude součet již větší než 21.

(*Antonín Jančařík*)

Úloha 8. Neopatrný chlapec upustil z balkónu, který je ve výšce 3 m nad zemí, na chodník malý míček – hopík. Po dopadu na chodník míček vyskočil do $\frac{2}{3}$ původní výšky, pak opět padal na chodník volným pádem a celý pohyb se znovu opakoval. Určete,

a) do jaké výšky hopík vyskočí po pátém odrazu a za jak dlouho od okamžiku upuštění na zem tato situace nastane,
b) poměr velikostí rychlostí při pátém a prvním dopadu na zem,
c) jakou dráhu míček urazí, než se jeho pohyb utlumí.

Chlapec dále přemýšlel, jak zařídit, aby míček po prvním odrazu vyskočil zpátky do téže výšky, z níž padal.

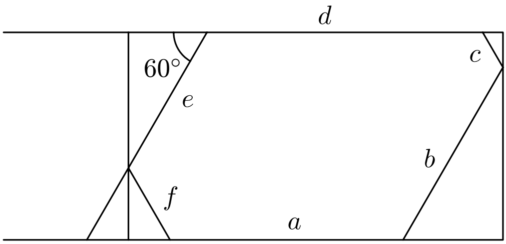
d) Vysvětlete, zda je to možné, a na základě udaných hodnot určete hledanou veličinu.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané číselné hodnoty. Odpor prostředí v průběhu pohybu míčku zanedbejte. Tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.
(*Ivo Volf*)

Řešení úloh z čísla 2/2009

Úloha 3.
a) Dokažte, že nelze sestrojit čtyřúhelník se shodnými vnitřními úhly a stranami délek 1, 2, 3, 4.
b) Sestrojte všechny šestiúhelníky se shodnými vnitřními úhly a stranami délek 1, 2, 3, 4, 5, 6.
c) Dokažte, že nelze sestrojit osmiúhelník se shodnými vnitřními úhly a stranami délek 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: (podle M. Bucháčka)



Obr. 1

a) Čtyřúhelník se čtyřmi shodnými vnitřními úhly má všechny úhly pravé, a jedná se tak o obdélník nebo čtverec. Ani jeden z těchto útvarů nemůže mít čtyři různé délky stran.

b) Jeden vnitřní úhel takového šestiúhelníku bude mít velikost 120°. Ze vztahu mezi úhly (obr. 1) plyne, že každé dvě protější strany budou rovnoběžné. To znamená, že si takový šestiúhelník můžeme doplnit na obdélník. Potom platí:

$$a + (b + f)\sin 30^\circ = d + (c + e)\sin 30^\circ$$

$$(b + c)\cos 30^\circ = (f + e)\cos 30^\circ$$

Dosazením $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ a vydělením $\cos 30^\circ$ dostáváme:

$$a + \frac{1}{2}(b + f) = d + \frac{1}{2}(c + e) \tag{1}$$

$$b + c = f + e \tag{2}$$

Z rovnice (2) vyjádříme například b a dosadíme do (1):

$$a + \frac{1}{2}(2f + e - c) = d + \frac{1}{2}(c + e)$$

Úpravami získáme:

$$a + f = d + c$$

Odečtením d a f a porovnáním s (2) potom dostáváme podmínku ekvivalentní vztahům (1) a (2):

$$a - d = c - f = e - b \tag{3}$$

Hledejme nyní všechna řešení soustavy rovnic (3) tak, aby řešením byla celá čísla 1 až 6 a každé číslo bylo přiřazeno právě jedné neznámé. Snadno zjistíme, že rozdíly v rovnicích soustavy (3) mohou nabývat pouze hodnot 1 a 3. To odpovídá například těmto dvěma řešením:

$$(a, b, c, d, e, f) = (6, 1, 4, 5, 2, 3)$$

$$(a, b, c, d, e, f) = (6, 1, 5, 3, 4, 2)$$

Uvědomme si, že pokud máme nějakou šestici čísel splňující soustavu rovnic (3), další řešení můžeme získat záměnou a s d, c s f, e s b. Touto úpravou však nezískáme šestiúhelník jiného tvaru, jen cyklicky zaměníme označení stran. Další řešení můžeme získat libovolnou záměnou uspořádaných dvojic (a, d), (c, f), (e, b). Řeší-li tedy soustavu rovnic (3) nějaká uspořádaná šestice (a, b, c, d, e, f), řeší tuto soustavu i následující šestice: (a, f, e, d, c, b), (e, f, a, b, c, d), (c, b, a, f, e, d), (c, d, e, f, a, b), (e, d, c, b, a, f).

Opět si ale můžeme všimnout, že všechna tato řešení znázorňují shodný šestiúhelník, kterému jsme pouze cyklicky zaměnili délky stran nebo jej znázornili v osové souměrnosti, a je tak opačně orientován. Jedinými řešeními úlohy tak zůstávají zmíněná dvě. Pokud již známe délky stran, konstrukce takových šestiúhelníků spočívá v postupné konstrukci stran s odpovídajícími délkami.

c) Snadno zjistíme, že protilehlé strany takového osmiúhelníku jsou rovnoběžné. Doplněním na obdélník je zřejmé, že musí platit:

$$a + (b + h)\frac{\sqrt{2}}{2} = e + (d + f)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Protože čísla a až h jsou celá, platí $a = e$, což je vzhledem k požadovaným délkám stran nemožné. Sestrojit takový osmiúhelník tedy nelze.

Úloha 4. Na vodorovnou železniční trať navazuje trať se stálým sklonem $\alpha = 1{,}00°$, délku přechodu považujte za zanedbatelnou. Na skloněnou trať vytáhneme soupravu vagonů délky $l = 240$ m tak, že její dolní konec je na rozhraní nakloněné a vodorovné roviny, a odbrzdíme. Určete

a) velikost rychlosti v_1, kterou bude mít souprava na vodorovné rovině,
b) dobu t_1 od uvedení do pohybu, za níž se celá souprava ocitne na vodorovné rovině,
c) velikost rychlosti v_2 a čas t_2 v případě, že soupravu vytáhneme tak, že její jedna třetina spočívá na vodorovné rovině a zbývající dvě třetiny na nakloněné rovině.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané číselné hodnoty. Tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. (*Josef Jírů*)

Řešení: (podle autora)

a) Podle zákona zachování mechanické energie je získaná kinetická energie soupravy rovna její původní potenciální energii, tj.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\alpha,$$

z čehož

$$v_1 = \sqrt{gl\sin\alpha} \doteq 6{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

b) Velikost síly F působící ve směru nakloněné roviny je rovna složce tíhové síly části soupravy délky x, která se právě nachází na nakloněné rovině:

$$F = \frac{x}{l} mg \sin\alpha$$

Vzhledem k tomu, že velikost síly F je přímo úměrná délce x, je pohyb soupravy částí harmonického pohybu z maximální nulové výchylky, tedy po dobu čtvrtiny periody. Hledaný čas tak je

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}},$$

kde tuhost určíme z krajní polohy $x = l$:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg\sin\alpha}{l}$$

Po dosazení dostaneme

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}} \doteq 59\ \text{s}.$$

c) Podle zákona zachování mechanické energie je získaná kinetická energie soupravy rovna její původní potenciální energii, tj.

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{2}{3}mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l \sin\alpha,$$

z čehož

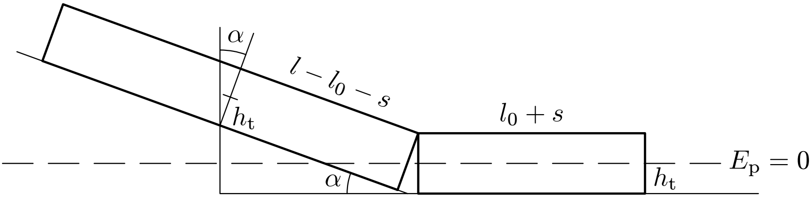
$$v_2 = \frac{2}{3}\sqrt{gl\sin\alpha} = \frac{2}{3}v_1 \doteq 4{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Hmotnost soupravy ani tuhost se nezměnila, ale změnila se maximální výchylka. Takový harmonický pohyb má stejnou periodu, a proto platí

$$t_2 = t_1 \doteq 59\ \text{s}.$$

Řešení: (podle M. Bucháčka)

Označme si výšku těžiště vagónů nad zemí h_t a zvolme tuto výšku jako hladinu s nulovou potenciální energií. Předpokládejme, že před začátkem pohybu se nachází část vlaku o délce l_0 na rovině (obr. 2).



Obr. 2

Potenciální polohovou energii potom vypočítáme jako $E_\mathrm{p} = mgh$, kde $m = k(l - l_0)$, k je délková hustota vlaku a

$$h = \frac{1}{2}(l - l_0)\sin\alpha - h_\mathrm{t} + \frac{h_\mathrm{t}}{\cos\alpha}.$$

Pro malé úhly α můžeme provést aproximaci $\cos\alpha \approx 1$, potom

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kg(l - l_0)^2 \sin\alpha.$$

Pokud se vlak posune o dráhu s, bude mít část na rovině délku $l_0 + s$ a část na skloněné trati délku $l - l_0 - s$. Potenciální energie vlaku v tomto stavu je

$$E'_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kg(l - l_0 - s)^2 \sin\alpha.$$

Úbytek potenciální energie se rovná přírůstku energie kinetické. Jestliže označíme $v(t)$ rychlost vlaku po uražení dráhy s, pak platí

$$\Delta E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p} - E'_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kg\left[(l - l_0)^2 - (l - l_0 - s)^2\right]\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2.$$

Odtud dostáváme

$$v(s) = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{l}[(l - l_0)^2 - (l - l_0 - s)^2]}.$$

Celkovou dobu pohybu t určíme jako

$$t = \int_0^{l-l_0} \frac{\mathrm{d}s}{v(s)} = \sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}} \int_0^{l-l_0} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(l - l_0)^2 - (l - l_0 - s)^2}}.$$

Zavedeme substituci

$$\sin m = \frac{l - l_0 - s}{l - l_0}.$$

Potom

$$s = (l - l_0)(1 - \sin m), \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}m} = -(l - l_0)\cos m.$$

Po dosazení

$$t = \sqrt{\frac{l}{g \sin\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(l - l_0)\cos m \mathrm{d}m}{\sqrt{(l - l_0)^2 - (l - l_0)^2 \sin^2 m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g \sin\alpha}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(l - l_0)\cos m \mathrm{d}m}{(l - l_0)\cos m}$$

a po integraci

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g \sin\alpha}}.$$

Nyní přejděme k řešení zadaných úloh:

a) Po dosazení do vztahu pro $v(s)$ za $l_0 = 0$, $s = l$ dostaneme

$$v_1 = \sqrt{gl \sin\alpha} \doteq 6{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) Po dosazení do vztahu pro t za $l_0 = 0$, $s = l$ dostaneme $t_1 \doteq 58{,}8$ s.

c) Po dosazení za $l_0 = \frac{1}{3}l$, $s = \frac{2}{3}l$ do vztahů pro $v(s)$ a t dostaneme

$$v_2 = \frac{2}{3}\sqrt{gl \sin\alpha} \doteq 4{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad t_2 = t_1 \doteq 58{,}8 \text{ s}.$$

Stav soutěže po 4 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (Gymnázium Luďka Pika, Plzeň) – 16,5 bodu