Rozhledy matematicko-fyzikální

51. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 3, 35–50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146316

51. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.)

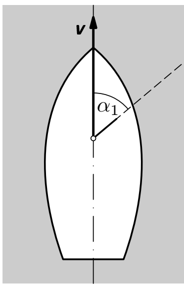
KATEGORIE A

1. Vítr na lodi

Vlajka na stožáru lodi plující po jezeře stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$ o velikosti $v = 20\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ vlála ve větru odchýlena o úhel $\alpha_1 = 50°$ od směru pohybu lodi (obr. 1). Pak byla při stálém kurzu velikost rychlosti lodi zvýšena na $2v = 40\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a odchylka vlajky se zvětšila na $\alpha_2 = 100°$.

a) Určete velikost a směr rychlosti větru $\boldsymbol{u}$ vzhledem ke klidné hladině jezera.

b) Jakou rychlostí by se musela loď v daném kurzu pohybovat, aby vlajka vlála kolmo k ose lodi?



Obr. 1

2. Skok přes válec

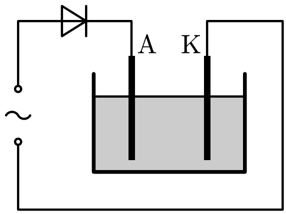
Válec o poloměru R se valí po vodorovné rovině, na které sedí žába. Střed válce se pohybuje stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. S jakou nejmenší počáteční rychlostí $\boldsymbol{u}_0$ musí žába vyskočit, aby přeskočila válec a dotkla se jej lehce jen v nejvyšším bodě? V jaké vzdálenosti od žáby se musí válec nacházet v okamžiku výskoku? Rozměry žáby zanedbejte.

3. Kamínek v pneumatice

Uvnitř pneumatiky kola automobilu o poloměru R se nachází malý kamínek, který tam zapadl při výměně ventilku. Při jaké minimální rychlosti automobilu bude kamínek obíhat spolu s jedním bodem pneumatiky, je-li součinitel smykového tření mezi kamínkem a pneumatikou f?

4. Elektrolýza

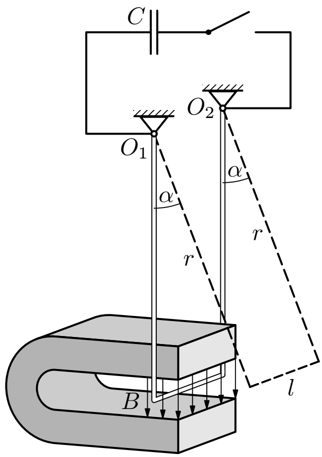
Elektrolytická vana s měděnými elektrodami a roztokem $CuSO_4$ jako elektrolytem byla připojena přes diodu ke zdroji střídavého napětí s harmonickým časovým průběhem (obr. 2). Za 24 hodin se na katodě vyloučila měď o hmotnosti 8,54 g. Určete střední hodnotu $I_{\text{stř}}$ a maximální hodnotu I_{m} procházejícího proudu. Diodu považujte za ideální. Potřebné údaje týkající se mědi vyhledejte v tabulkách. (Střední hodnota časově proměnného periodického proudu s periodou T je definována jako hodnota stálého stejnosměrného proudu, který přenese za dobu T stejný náboj jako uvažovaný proměnný proud.)



Obr. 2

5. Balistická smyčka

Pravoúhlá smyčka zhotovená z měděného drátu, jehož průřez má plošný obsah $S = 2{,}5\,\text{mm}^2$ je otáčivě zavěšena v bodech O_1, O_2. Svislá ramena délky $r = 30$ cm jsou dole spojena vodorovnou příčkou délky $l = 6{,}0$ cm, která se nachází v homogenním magnetickém poli permanentního magnetu (obr. 3). Vybijeme-li přes smyčku kondenzátor o kapacitě $C = 5{,}0\,\text{mF}$ nabitý na napětí $U = 100$ V, vykývne smyčka okolo vodorovné osy O_1O_2 ven z magnetu o úhel $\alpha = 23°$ a pak pokračuje v kývání. Určete magnetickou indukci B mezi póly magnetu a polaritu napětí na kondenzátoru před sepnutím spínače. Hustota mědi $\varrho = 8\,930\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Tření v bodech závěsu a odpor vzduchu zanedbejte.

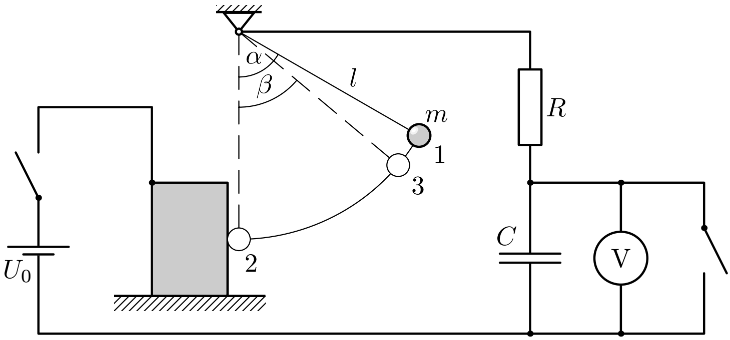


Obr. 3

6. *Praktická úloha*: **Určení doby nárazu**

Proveďte pokus podle obr. 4. Kovovou kuličku o hmotnosti m zavěšenou na tenkém měděném drátu délky l vychýlíte z rovnovážné polohy a necháte kolmo dopadnout na svislou stěnu masivního kovového tělesa, kde se pružně odrazí. Přitom se na krátkou dobu uzavře elektrický obvod a kondenzátor o kapacitě C se nabije přes rezistor o odporu R. Časová konstanta $\tau = RC$ obvodu musí být dostatečně velká, aby napětí U, které na kondenzátoru vznikne, bylo mnohem menší než napětí U_0 zdroje. V takovém případě platí pro dobu vzájemného působení obou těles

$$t \approx \tau \cdot \frac{U}{U_0}. \tag{1}$$



Obr. 4

Úkoly:

a) Odvoďte vztah (1).

b) Určete dobu, po kterou byla obě tělesa během odrazu ve vzájemném dotyku.

c) Určete průměrnou velikost sil vzájemného působení během odrazu.

Pokyny k provedení úlohy:

- Pečlivé připojení měděného závěsu ke kuličce a čistota povrchu těles musí zajistit dobrý kontakt během nárazu. Závěs upevněte ke stojanu pomocí tyčky z izolantu.
- Vhodná časová konstanta τ obvodu je okolo 10 ms. Volte například $R = 1$ kΩ, $C = 10$ μF. Hodnoty přeměřte, protože zvláště kondenzátory jsou vyráběny s velkou tolerancí.
- Digitální voltmetr by měl mít vstupní odpor nejméně 10 MΩ, aby vybíjení kondenzátoru po nárazu probíhalo co nejpomaleji.

- Pro výpočet průměrné velikosti síly musíte zjistit velikost změny hybnosti kuličky při odrazu. Rychlost při dopadu kuličky na stěnu a po odrazu od ní můžete určit z délky závěsu a úhlů α a β, o které je vychýlen před uvolněním kuličky a v poloze, do které se vychýlí po odrazu. K tomu použijeme úhloměr umístěný v těsné blízkosti závěsu.

7. Automobil (za jízdy po přímé trati)

Automobil má motor o maximálním výkonu $P_\mathrm{m} = 95$ kW a jeho hmotnost s jednou osobou je $m = 1\,000$ kg. K uvedení do pohybu odbrzděného automobilu se zařazeným „neutrálem" na vodorovné silnici musel přivolaný pomocník vyvinout ve vodorovném směru sílu o velikosti $F_0 = 120$ N. Předpokládejte, že velikost odporové síly je popsána funkcí

$$F_\mathrm{t} = Av^2 + F_0,$$

kde $A =$ konst. a v je velikost okamžité rychlosti.

a) Řidič provedl experiment: vyjel na vrchol kopce, z něhož se přímočará vozovka svažuje pod stálým úhlem $\alpha = 4°$. Automobil po rozjezdu z kopce a po zařazení „neutrálu" dosáhl stálé rychlosti $v_1 = 72\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Určete konstantu A.
b) Jaký musí být výkon P_1 motoru, aby se automobil pohyboval stálou rychlostí $v_1 = 72\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ po vodorovné vozovce?
c) Při jízdě stálou rychlostí musí motor pracovat se stálým výkonem. Sestrojte graf závislosti výkonu P motoru na rychlosti v a určete maximální rychlost v_m při výkonu P_m.
d) Automobil podle bodu a) sjel k úpatí kopce a pokračoval v jízdě se zařazeným „neutrálem" po vodorovné přímé vozovce. V jaké vzdálenosti l_0 od úpatí se zastavil bez použití brzdy?

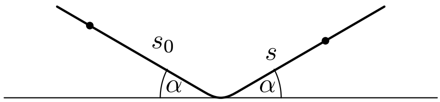
KATEGORIE B

1. Pohyb lyžaře

Lyžař stojící na svahu ve vzdálenosti s_0 od jeho úpatí se začne samovolně rozjíždět dolů. Po dosažení konce svahu pokračuje ve své jízdě do protisvahu a zastaví se ve vzdálenosti $s = \frac{4}{5}s_0$ od úpatí (obr. 1). Při řešení uvažujte, že úhel sklonu svahu i protisvahu je stejný a má velikost α. Při pohybu lyžaře také uvažujte, že na lyžaře působí třecí síla smykového tření o velikosti F ($F < F_0$, kde F_0 je velikost třecí síly působící na lyžaře, když stojí). Určete

a) podmínku pro velikost statického součinitele smykového tření f_0, aby se lyžař mohl samovolně rozjet ze svahu,
b) poměr doby klesání T_1 a doby stoupání T_2 lyžaře,
c) součinitel smykového tření f lyžaře za pohybu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnotu $\alpha = 30°$. Při řešení zanedbejte odpor vzduchu a vliv přechodové části mezi oběma svahy.



Obr. 1

2. Pohyby v planetární soustavě

O planetě Mars zjistili astronomové na základě měření z povrchu Země, že siderická doba oběhu Marsu je $T_{\mathrm{M}} = 1{,}881$ roku. V úloze vystačíme při řešení problémů s modelem, v němž se obě planety pohybují po kružnicích, jejichž střed splývá se středem Slunce.

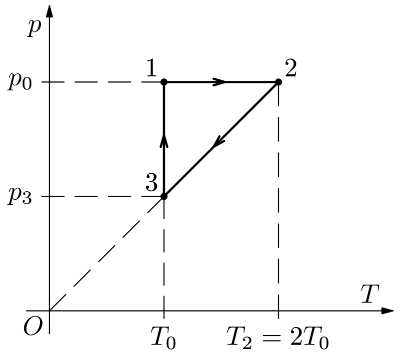
a) Určete poloměr kružnice, po níž se pohybuje střed Marsu, a rychlost pohybu středů obou planet při jejich pohybu kolem středu Slunce.
b) Z údajů o pohybu Marsu kolem Slunce určete hmotnost Slunce.
c) Jestliže se středy Slunce, Země a Marsu dostanou přibližně do téže polopřímky, pak právě o půlnoci začneme naše pozorování. Za jak dlouho se tato situace bude opakovat? Tato doba se nazývá *synodická* oběžná doba.
d) Pro cestu z okolí Země do okolí Marsu je energeticky optimální pohyb po trajektorii tvaru elipsy, která se vně dotýká trajektorie Země a uvnitř trajektorie Marsu. Jak dlouho trvá pohyb po této trajektorii? Situaci načrtněte.

Při řešení počítejte, že 1 AU $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m, 1 rok $= 3{,}156 \cdot 10^{7}$ s, $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Ve výsledku volte „rozumný“ počet platných míst. Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro uvedené hodnoty.

3. Kruhový děj

Na obr. 2 je znázorněn v $p - T$ diagramu kruhový děj, jehož pracovní látkou je ideální plyn s dvouatomovými molekulami, jehož vnitřní energie je pro n molů dána vztahem $U = \frac{5}{2}nRT$. Na počátku se plyn nachází ve stavu 1, který je určen stavovými veličinami p_0, V_0, T_0.

a) Charakterizujte jednotlivé části kruhového děje a vyjádřete zbývající stavové veličiny p, V, T odpovídající stavům 2 a 3 z obr. 2 pomocí veličin p_0, V_0, T_0.
b) Znázorněte kruhový děj z obr. 2 pomocí $p - V$ diagramu.
c) Určete teplo dodané (odevzdané) v jednotlivých úsecích $1-2$, $2-3$, $3-1$ kruhového děje.
d) Určete účinnost tohoto kruhového děje.



Obr. 2

4. Dosažitelná rychlost

Automobil o hmotnosti $m = 1\,200$ kg se pohybuje po vodorovné silnici, přičemž může vyvíjet maximální výkon $P_{\mathrm{max}} = 70$ kW. Síla valivého odporu má velikost $F_1 = 400$ N. Vzduch působí na automobil odporovou silou o velikosti $F_{\mathrm{odp}} = kv^2$, kde $k = 0{,}90\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$. Součinitel smykového tření mezi pneumatikami a namrzlou vozovkou je $f = 0{,}25$. Obě nápravy automobilu jsou stejně zatížené, záběrová kola jsou pouze na jedné nápravě.

a) Jaké maximální rychlosti může automobil za daných podmínek dosáhnout?
b) Zvolíme-li při rozjíždění automobilu stálou tahovou sílu, dosáhnou po určité době jak rychlost automobilu, tak i výkon motoru stálých hodnot. Sestrojte grafy závislosti dosažitelné rychlosti a dosažitelného výkonu automobilu na zvolené tahové síle F motoru.
c) Sestrojte graf závislosti dosažitelné rychlosti automobilu na zvoleném výkonu $P \in \langle 0, P_{\mathrm{max}} \rangle$ motoru.

5. Satelity

Sluneční záření o zářivém výkonu $L = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ W zahřívá všechna tělesa sluneční soustavy (včetně umělých družic). Slunce můžeme považovat za dokonale černé těleso, které pohlcuje veškeré elektromagnetické záření a vydává pouze záření vlastní. Na oběžné dráze kolem Země v blízkosti jejího povrchu mohou obíhat družice různých tvarů, o nichž budeme předpokládat, že jsou trvale ozářeny Sluncem, mají dobrou tepelnou vodivost a nátěr, který se svými vlastnostmi blíží vlastnostem dokonale černého tělesa. Označme S velikost povrchu družice, S_1 průmět povrchu družice do směru kolmého na směr záření. Stefanova–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-4}}$, 1 AU $= 1{,}5 \cdot 10^{8}$ km.

a) Na jakou teplotu T_1 by se ohřála rovinná část povrchu družice nastavená kolmo k dopadajícím slunečním paprskům, kdyby byla družice tepelně nevodivá?
b) Odvoďte obecný vztah pro výpočet teploty T družice jako funkci poměru $\frac{S_1}{S}$.
c) Určete teplotu T_2 povrchu družice přibližně kulového tvaru (např. *Sputnik 1*).
d) Určete teplotu T_3 povrchu družice přibližně tvaru krychle, jejíž jedna stěna je kolmá na směr dopadajícího záření (např. *CubeSat*).
e) Určete teplotu T_4 povrchu družice přibližně tvaru válce o průměru d a výšce h, $h = 3d$. Podélná osa válce je kolmá na směr dopadajícího záření (např. *Geo Eye 1*).

6. *Praktická úloha*: **Určení součinitele smykového tření**

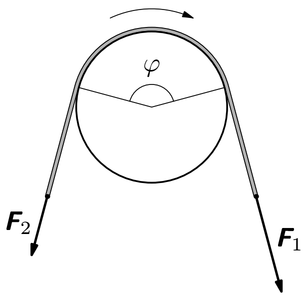
Teorie:

Táhneme-li vlákno přes těleso kruhového průřezu, dochází ke vzniku tzv. *vláknového tření*, takže síla $\boldsymbol{F}_1$, kterou působíme na jednom konci vlákna ve směru pohybu, musí být větší než síla $\boldsymbol{F}_2$, kterou vlákno napínáme na opačném konci proti pohybu (obr. 3). Velikosti obou sil jsou v poměru

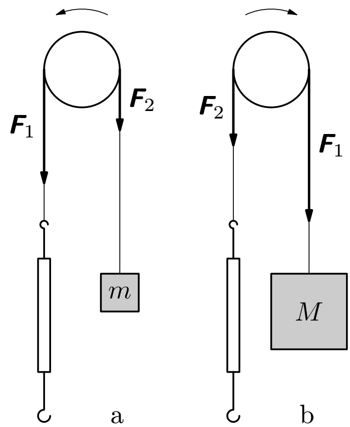
$$\frac{F_1}{F_2} = \mathrm{e}^{f\varphi}, \qquad (1)$$

kde f je součinitel smykového tření mezi vláknem a povrchem tělesa a φ je středový úhel oblouku, v němž se vlákno dotýká zakřiveného povrchu.

Úkol:
Určete součinitel smykového tření mezi novodurovou trubkou a silonovým vláknem.



Obr. 3



Obr. 4

Provedení úlohy:
Kus novodurové trubky o průměru 3 cm až 4 cm upevněte do vodorovné polohy mezi dva stojany. (Můžete např. použít trubku od vsavače.) Přes trubku přehoďte silonový rybářský vlasec o nosnosti alespoň 2 kg, na jeden konec zavěste závaží o hmotnosti 102 g a na druhý konec upevněte siloměr s rozsahem 10 N (obr. 4a). Táhněte za siloměr směrem dolů a zvedejte závaží rovnoměrným pohybem vzhůru. Přitom změřte velikost síly $\boldsymbol{F}_1$. Síla $\boldsymbol{F}_2$ má v tomto uspořádání velikost 1 N a středový úhel oblouku je π radiánů. Měření zopakujte pro středové úhly 1,5π, 2π, 2,5π, 3π, 3,5π a 4π. To znamená, že siloměr potáhnete střídavě ve vodorovném směru, svisle vzhůru a svisle dolů. Pro každý z těchto směrů je třeba siloměr seřídit nebo alespoň provést korekci na změnu nulové polohy.

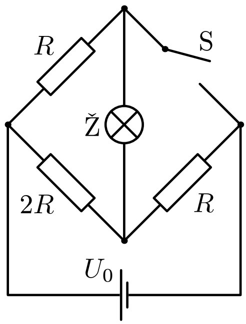
Pozor: Při tažení směrem dolů je nutno k údaji siloměru přičíst jeho vlastní tíhu.

Další měření proveďte podle obr. 4b. Použijte závaží hmotnosti 1,02 kg, jeho rovnoměrné klesání brzděte siloměrem a přitom změřte velikost síly $\boldsymbol{F}_2$. Síla $\boldsymbol{F}_1$ má v tomto uspořádání velikost 10 N. Měření opakujte pro stejné středové úhly jako u menšího závaží.

Ze vztahu (1) vyjádřete součinitel smykového tření f a z výsledků měření vypočítejte jeho velikost. Výsledky měření a výpočtů zapište do přehledné tabulky.

7. Elektrický obvod

Na obr. 5 je schéma elektrického obvodu. Napětí zdroje je $U_0 = 108$ V, jeho vnitřní odpor zanedbatelný, $R = 180\ \Omega$. Po sepnutí spínače se proud žárovkou nezměnil.



Obr. 5

a) Určete jeho velikost a napětí na žárovce.
b) Porovnejte proud odebíraný ze zdroje před a po sepnutí spínače.

KATEGORIE C

1. Macocha

Z okraje vyhlídkové plošiny Macochy vrhl chlapec svisle dolů kámen s počáteční rychlostí o velikosti $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Za dobu 5,20 s od začátku vrhu byl slyšet dopad kamene na vodní hladinu. K vrhu došlo při teplotě vzduchu 20 °C, při níž se zvuk ve vzduchu šíří rychlostí $343\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete

a) výšku horního okraje propasti nad vodní hladinou a dobu od začátku vrhu, za kterou dopadl kámen na vodní hladinu,
b) velikost rychlosti, s jakou dopadl kámen do vody.

Odpor vzduchu zanedbejte.

2. Lyžař

Lyžař stojící na táhlém dlouhém svahu o úhlu sklonu $\alpha = 12°$ se začal samovolně rozjíždět dolů po vyjeté stopě. Za dobu $t_1 = 10{,}0$ s projel dráhu $s_1 = 30$ m. Pak ale stopa končila, lyžař vjel do hlubokého sněhu, tření mezi skluznicí a svahem se zvětšilo a pohyb lyžaře se změnil na rovnoměrně zpomalený až do zastavení. Po ujetí drahy $s_2 = 54$ m v hlubokém sněhu se velikost rychlosti lyžaře zmenšila na polovinu. Určete

a) velikost v_1 rychlosti, s jakou vjel do hlubokého sněhu,
b) celkovou dobu pohybu a celkovou dráhu, kterou lyžař urazil až do zastavení,
c) součinitele f_1, f_2 smykového tření mezi skluznicí a svahem při jízdě ve vyjeté stopě a při jízdě v hlubokém sněhu.
d) Sestrojte ve vhodném měřítku graf závislosti rychlosti na čase.

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty. Odpor vzduchu zanedbejte. Při řešení předpokládejte, že lyžař za celou dobu nepoužije hole.

3. Házení míčkem

Dva chlapci, Martin a Kuba, si házeli míčkem. Nejprve Martin hodil míček pod elevačním úhlem $\alpha_1 = 30°$ a Kuba jej ve stejné výšce nad zemí zachytil v čase $t_1 = 1{,}60$ s. Poté Kuba hodil míček Martinovi počáteční rychlostí o velikosti $v_{02} = 17{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a ten jej zachytil opět ve stejné výšce nad zemí.

a) Určete velikost v_{01} počáteční rychlosti prvního hodu a vzdálenost d chlapců.
b) Určete elevační úhel α_2 druhého hodu.
c) Určete elevační úhel α_3 hodu, při kterém Kuba udělí míčku poloviční kinetickou energii než v předchozím svém hodu tak, aby Martin míček zachytil ve stejné výšce nad zemí.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Odpor vzduchu zanedbejte.

4. Zahřívání kalorimetru

Do kalorimetru o tepelné kapacitě $C_\mathrm{k} = 70\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$, ve kterém se nacházela voda a ledové kostky, bylo ponořeno topné tělísko o výkonu 50 W. V čase 5 min po zapnutí proudu byla v kalorimetru stále teplota 0 °C. V čase $\tau_1 = 10$ minut jsme naměřili teplotu $t_1 = 3{,}1$ °C a v čase $\tau_2 = 15$ minut teplotu $t_2 = 13{,}6$ °C. Určete hmotnost m ledu a hmotnost M vody v kalorimetru na počátku děje.

Měrná tepelná kapacita vody $c = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_\mathrm{t} = 334\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

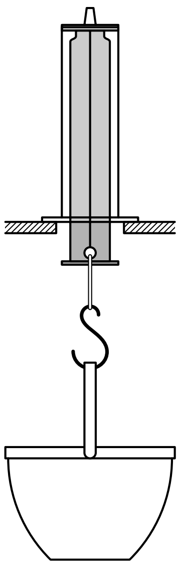
5. Rekrystalizace železa

Při dosažení teploty 910 °C se krystalová struktura železa mění z fáze α s kubickou prostorově centrovanou elementární buňkou na fázi γ s kubickou plošně centrovanou elementární buňkou. Hustota železa se přitom skokem zmenší přibližně o 2 %.

a) Jak se změní mřížkový parametr a (délka hrany elementární buňky)?
b) Jak se změní vzdálenost s sousedních (tj. nejbližších) iontů v krystalu?

6. *Praktická úloha*: **Určení atmosférického tlaku**

Píst injekční stříkačky se pohybuje se třením, ale zato velmi dobře těsní. Posuneme-li jej až k výpustnímu otvoru, otvor utěsníme a pak píst od otvoru vzdálíme, vznikne ve stříkačce téměř vakuum. Při vzdalování pístu od uzavřeného výpustního otvoru musíme kromě síly tření překonávat ještě mnohem větší tlakovou sílu, kterou na píst zvenčí působí okolní vzduch.



Obr. 1

Úkol:
Zjistěte, jaká je velikost této tlakové síly a plošný obsah pístu. Z těchto veličin vypočítejte atmosférický tlak okolního vzduchu.

Provedení úlohy:
Na kraj stolu připevníme kus překližky nebo plechu s otvorem, jehož průměr je o málo větší, než je průměr pístu. Do konce táhla pístu vyvrtejte malý otvor, stříkačku umístěte podle obr. 1 a na táhlo zavěste nádobu vhodné velikosti. Do ní postupně přidávejte zátěž, až překonáte tření pístu a píst začne zvolna sjíždět dolů. Pak nádobu se zátěží zvažte. Poté vraťte píst do horní polohy, uzavřete výpustní otvor a zvětšujte zátěž, až kromě tření překonáte i tlakovou sílu okolního vzduchu. Zátěž opět zvažte. Rozdíl tíhových sil obou zátěží je roven velikosti hledané tlakové síly. K uzavření výpustního otvoru stačí přitlačení navlhčeného palce. Pohodlnější je nasadit na výpustní otvor kousek akvaristické hadičky, přeložit ji a stisknout tlačkou.

Měření několikrát opakujte a získané výsledky statisticky zpracujte.

7. Plovoucí válec

V nádobě je nalita voda o hustotě ϱ_1 a na ní je nalita vrstva benzinu o hustotě ϱ_2. V těchto dvou kapalinách je zcela ponořen dřevěný válec, jehož průměr je podstatně větší než výška, a to tak, že horní podstava válce splývá s horní hladinou benzinu, přičemž $\frac{2}{3}$ objemu válce jsou v benzinu, zbývající část válce je ve vodě. Hustotu vzduchu zanedbejte.

a) Určete hustotu ϱ_3 dřeva, ze kterého je válec vyroben.
b) Na válec nyní položíme mosazné tělísko o hustotě ϱ_4 (malé výšky vzhledem k výšce válce) tak, aby válec byl ponořen polovinou svého objemu ve vodě a polovinou v benzinu. Určete hmotnost m tělíska.
c) Tělísko odebereme a vrstvu benzinu snížíme, a to tak, že v benzinu bude nyní jen $\frac{1}{3}$ objemu válce. Určete, jaká část objemu válce bude nyní ve vodě a jaká část objemu bude ve vzduchu.
d) Jaká část objemu válce by byla ve vodě, pokud bychom odstranili benzinovou vrstvu?
e) Jaká část objemu válce by byla v benzinu, pokud by v nádobě byl jen benzin?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $V = 100\ \mathrm{cm}^3$, $\varrho_1 = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\varrho_2 = 710\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\varrho_4 = 8\,400\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

KATEGORIE D

1. Průměrná rychlost

Na regionální železniční trati délky $s = 48$ km projel vlak první čtvrtinu trati průměrnou rychlostí $v_1 = 60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, zbývající část trati průměrnou rychlostí $v_2 = 36\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Při zpáteční jízdě projel zmíněnou čtvrtinu trati stejnou průměrnou rychlostí $v_1' = v_1 = 60\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, přičemž jeho průměrná rychlost na celé trati byla $v_\mathrm{p}' = 45\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

a) Vypočtěte průměrnou rychlost v_p vlaku na celé trati při první jízdě.
b) Vypočtěte průměrnou rychlost vlaku v_2' na delším úseku trati při zpáteční jízdě.
c) Obě úlohy lze vyřešit obecně, aniž budeme znát délku trati s. Proveďte toto obecné řešení a poté dosazením číselných hodnot rychlostí ze zadání předchozí číselné výsledky ověřte.

2. Dvě tramvaje

Ve stanici stály za sebou dvě tramvaje. První se začala rozjíždět se zrychlením $1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, druhá se začala rozjíždět o 4 s později se zrychlením $1{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Obě tramvaje, jakmile dosáhly rychlosti o velikosti $12\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, pohybovaly se dále rovnoměrným pohybem. Před následující stanicí začaly obě tramvaje současně brzdit a pohybovaly se rovnoměrně zpomaleným pohybem. První tramvaj měla brzdnou dráhu 54 m. Po zastavení stály obě těsně za sebou jako v předchozí stanici. Vzdálenost mezi stanicemi je 594 m.

a) Proveďte potřebné výpočty a sestrojte graf závislosti rychlostí obou tramvají na čase.
b) Z grafu určete maximální vzdálenost mezi tramvajemi během jízdy.

3. Brzdění automobilu

Nákladní automobil o hmotnosti $m_0 = 5{,}00$ t veze na korbě železobetonový blok tvaru kvádru o hmotnosti $m = 3{,}00$ t rychlostí o velikosti $v_0 = 6{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Mezi blokem a předním čelem korby je mezera délky $d = 1{,}6$ m. Začne-li automobil brzdit stálou silou, zastaví se v čase $t = 12$ s od začátku brzdění. Nyní předpokládejme, že se blok během rovnoměrného pohybu automobilu na korbě zcela uvolní a že se po korbě může pohybovat bez tření. Automobil poté začne brzdit stejnou silou až do úplného zastavení.

a) Určete velikost a zrychlení automobilu s upevněným blokem a velikost a_1 zrychlení automobilu během pohybu bloku na korbě.

b) Určete čas t_1, měřený od začátku brzdění, v němž dojde k nárazu bloku na čelo korby.
c) Určete velikost v_1 rychlosti automobilu bezprostředně před nárazem a velikost v_2 rychlosti automobilu bezprostředně po nárazu. Předpokládejte, že náraz je dokonale nepružný.
d) Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase pro oba případy a z grafu určete obě brzdné dráhy automobilu.

4. Tyč s kuličkami

Tyč zanedbatelné hmotnosti a délky l je zavěšena na svém konci. Na druhém konci je umístěna kulička zanedbatelných rozměrů a o hmotnosti m.

a) Tyč vychýlíme do vodorovné polohy a uvolníme. Určete velikost v rychlosti kuličky při jejím průchodu nejnižší polohou.
b) Do středu tyče přidáme kuličku stejné hmotnosti. Tyč s oběma kuličkami opět vychýlíme do vodorovné polohy a uvolníme. Určete velikost v_1 rychlosti původní kuličky a velikost v_2 rychlosti přidané kuličky při průchodu nejnižší polohou.
c) Určete v úlohách a), b) velikost výsledné síly, kterou působí tyč na osu otáčení při průchodu rovnovážnou polohou.

5. Trestné kopy

V průběhu fotbalového zápasu se třikrát kopal trestný kop ze vzdálenosti 22,0 m před brankou. Hráči soupeře vždy postavili ve vzdálenosti 9,15 m od míče zeď, jejíž výška byla 1,80 m. Fotbalista Adámek kopnul míč počáteční rychlostí $v_{0\mathrm{A}} = 24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\alpha_\mathrm{A} = 18°$, fotbalista Beneš počáteční rychlostí $v_{0\mathrm{B}} = 25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\alpha_\mathrm{B} = 16°$ a fotbalista Cába počáteční rychlostí $v_{0\mathrm{C}} = 26\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\alpha_\mathrm{C} = 14°$. Žádný z míčů brankář ani jiný fotbalista mimo zeď během letu nezasáhl.

a) Rozhodněte, kteří fotbalisté vstřelili gól.
b) Určete dobu letu míče, který nezasáhl zeď, k brance.
c) Určete maximální výšku každého míče, který nezasáhl zeď, a místo, kde této výšky dosáhl.

Vnitřní výška branky $h = 2{,}44$ m, průměr míče $d = 0{,}22$ m. Odpor vzduchu a rotaci míče zanedbejte. Rovina trajektorie míče je kolmá k brankové čáře.

6. *Praktická úloha*: **Studium funkční závislosti**

Každé těleso, které zavěsíme otáčivě okolo vodorovné osy neprocházející těžištěm a z této rovnovážné polohy vychýlíme, začne po uvolnění kmitat – vznikne tzv. fyzické kyvadlo. Pokud výchylka kyvadla z rovnovážné polohy je malá, pak doba každého kmitu, neboli perioda, nezávisí na výchylce. To znamená, že u každého kyvadla naměříme periodu stejnou, ať je výchylka např. 2° nebo 4°. Naopak při velké výchylce, např. 45°, naměříme periodu poněkud větší. Jako fyzické kyvadlo použijeme desku nepravidelného tvaru z překližky, kartonu apod., která se nesmí prohýbat.

Úkoly:

a) Najděte polohu těžiště desky podepřením v jednom bodě ve vodorovné poloze. Polohu těžiště na desce vyznačte.

b) Vyvrtejte otvor mimo těžiště a desku v tomto otvoru zavěste na vodorovnou tenkou tyčku. Orientačně ověřte skutečnost, že perioda malých kmitů (s úhlovou výchylkou např. do 10°) téměř na této úhlové výchylce nezávisí a že perioda s velkou úhlovou výchylkou (např. kolem 45°) je nepatrně větší.

c) Vyvrtejte 5 malých otvorů ve stejné vzdálenosti r a v různých směrech od těžiště. Postupně desku v těchto otvorech zavěste, změřte dobu, za kterou proběhne několik malých kmitů desky a vypočtěte periodu T kmitů. Ze získaných výsledků udělejte závěr.

Číslo měření	1	2	3	4	5	6
r/cm						
T/s						

d) Vyvrtejte 12 dalších malých otvorů v různých vzdálenostech od těžiště, od malé až k maximální možné. Změřte stejně jako v úloze c) dobu několika malých kmitů. Pro každou vzdálenost proveďte 3 měření. Výsledky měření zapište do tabulky (r vzdálenost, N počet kmitů, t doba N kmitů, T průměrná perioda):

Číslo měření	$\frac{r}{\text{cm}}$	N	$\frac{t_1}{\text{s}}$	$\frac{t_2}{\text{s}}$	$\frac{t_3}{\text{s}}$	$\frac{T=\frac{t_1+t_2+t_3}{N}}{\text{s}}$
1						
2						
3						
$\vdots$						

e) Sestrojte graf závislosti periody kmitů na vzdálenosti od těžiště a zformulujte závěr. Graf vytvořte počítačem (např. v excelu), nebo ručně na milimetrový papír. V případě excelu si vytvořte tabulku jako v návodu, zapište do ní naměřené údaje a v posledním sloupci proveďte výpočet periody pomocí vložené funkce. Kurzorem označte dvojici sloupců s daty a vložte *Graf*. Volte typ grafu *XY bodový*, podtyp *bodový* (tj. bez spojnic datových bodů) – zobrazí se soustava izolovaných bodů. Po kliknutí pravým tlačítkem myši na libovolný z nich z nabídky zvolte *Přidat spojnici trendu* dále typ trendu – *polynomický*, *stupeň 6*. Tím se zobrazí plynulá křivka, která proloží zobrazené body v grafu.

7. Měsíce Jupitera

Rok 2009 je Mezinárodním rokem astronomie. Před 400 lety, v roce 1609, zformuloval německý astronom Johannes Kepler působící v královských službách císaře Rudolfa II. v Praze svůj první a druhý zákon o pohybu planet. V dalším roce 1610 objevil italský astronom Galileo Galilei při jednom z prvních pohledů na oblohu dalekohledem čtyři největší Jupiterovy měsíce Io, Europa, Ganymed a Kallisto. Tomuto tématu je věnována následující úloha.

Měsíc Io obíhá kolem planety Jupiter s periodou $T_{\mathrm{Io}} = 1{,}77$ d, měsíc Europa s periodou $T_{\mathrm{Eu}} = 3{,}55$ d. Měsíc Kallisto se nachází ve střední vzdálenosti od středu Jupitera $r_{\mathrm{Ka}} = 1{,}883 \cdot 10^6$ km a má dobu oběhu $T_{\mathrm{Ka}} = 16{,}69$ d. Největší měsíc Jupitera (a zároveň největší měsíc ve Sluneční soustavě) Ganymed má střední vzdálenost od středu Jupitera $r_{\mathrm{Ga}} = 1{,}070 \cdot 10^6$ km. Trajektorie všech čtyř měsíců leží téměř v téže rovině a lze je s dostatečnou přesností považovat za kružnice.

a) Určete periodu T_{Ga} oběhu měsíce Ganymed.
b) Určete střední vzdálenosti r_{Io}, r_{Eu} od středu Jupitera měsíců Io a Europa.
c) Rozhodněte, který z měsíců má největší velikost obvodové rychlosti a vypočtěte ji.
d) Určete minimální vzájemnou vzdálenost $d_{\min}$ a maximální vzájemnou vzdálenost $d_{\max}$ měsíců Ganymed a Kallisto a dobu Δt, za kterou se oba měsíce z jedné pozice do druhé přemístí.
e) Z vybraných údajů v zadání určete hmotnost M Jupitera.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Gravitační konstanta je $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.