FYZIKA

Airyho zákon a zachování energie

Michal Musílek, SOŠ Stěžery

Abstract. Airy's hydrological law states that the mass of objects drifted by the stream is directly proportional to the sixth power of the water velocity. Airy's law is easy to derive with the use of secondary school physics. In our article, the law is derived from the law of conservation of energy. The result explains the destructiveness of brooks and rivers in flood. At the same time, it presents an interesting example of a power function with an exponent greater than two which rarely occurs in secondary school physics.

Na začátku 21. století postihlo Čechy a Moravu několik ničivých povodní. Jak je možné, že když proud řeky několikanásobně zvětší svou rychlost, má náhle tak ničivé účinky? Odpověď najdeme v Perelmanově knize [1], kde se v kapitole „Kameny unášené vodou“ uvádí tzv. Airyho zákon*):

Vzroste-li rychlost proudu n-krát, nabývá proud schopnosti unášet předměty n^6-krát těžší.

Úměrnost šesté mocnině některé veličiny je v přírodě vzácná. Studenti se se vzorcem, ve kterém by byla šestá mocnina, ve školské fyzice běžně nesetkávají. Ukažme si nejprve na konkrétním příkladu, co taková závislost v praxi znamená.

Příklad 1. Voda v říčce se za běžného stavu vody pohybuje rychlostí $0,6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a odnáší drobná zrníčka písku a kaménky až do hmotnosti 100 mg. Při povodni se z klidné říčky stala dravá řeka a rychlost proudu se zvětšila na $6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete hraniční hmotnost kamenů, s kterými proud pohne při této povodni.

Řešení: Označme $v_0 = 0{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ rychlost vody za běžného stavu a $m_0 = 0{,}000\,1\ \mathrm{kg}$ hmotnost kaménků, které proud při této rychlosti unáší. Podobně $v_1 = 6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a m_1 je rychlost proudu a hmotnost unášených

*) George Biddell Airy (27. 7. 1801–2. 1. 1892) byl významný anglický matematik, astronom, geofyzik a meteorolog [2, 69]. Byl uznávaným odborníkem, zastával např. místo lucasiánského profesora matematiky na Cambridgské univerzitě, funkci královského astronoma a později předsedy Královské společnosti v Londýně (obr. 2).

kamenů při povodni. Podle Airyho zákona platí

$$\frac{m_1}{m_0} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^6,$$

odkud

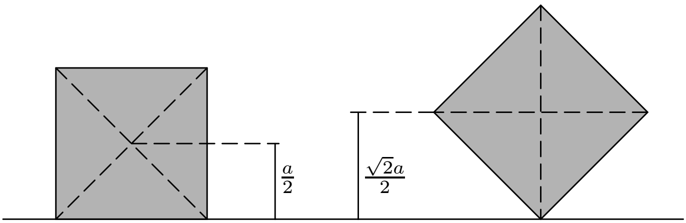
$$m_1 = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^6 m_0.$$

Číselně je

$$m_1 = \left(\frac{6}{0{,}6}\right)^6 \cdot 0{,}000\,1\ \text{kg} = 100\ \text{kg}.$$

Při povodni proud pohne kameny s hmotností až 100 kg.

Takový výsledek se může některým studentům zdát neuvěřitelný. Proto bude zajímavé pokusit se Airyho zákon vyvodit z nějakého obecného principu, který je ve středoškolské fyzice běžně probírán. Perelman dokazuje Airyho zákon pro kamenné krychle pomocí momentů sil a momentové věty. My si „vypůjčíme“ krychlový tvar kamenů (k vytvoření vhodné modelové situace) a ukážeme, že Airyho zákon lze jednoduše vyvodit ze zákona zachování energie (obr. 1).



Obr. 1

Tekoucí voda působí na kámen tlakovou silou, pohybuje s ním, a tedy koná práci. Touto prací se musí zvýšit tíhová potenciální energie kamene natolik, aby se z rovnovážné polohy stálé na stěně (těžiště krychle je v tu chvíli ve výšce poloviny délky hrany krychle a) pootočil do rovnovážné polohy vratké na hraně (těžiště krychle je ve výšce poloviny odmocniny ze dvou krát délka hrany krychle). Z této polohy se kámen dál valí ve směru proudu – je unášen vodou. Změna tíhové potenciální energie pro kámen hmotnosti m, objemu V a hustoty ϱ_k je

$$\Delta E_p = mg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a = \varrho_k V g\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a.$$

Protože v uzavřené soustavě těles se celková energie zachovává, musí o stejně velkou změnu klesnout energie vody (kapalného tělesa) o zhruba stejném objemu, jako je objem kamene V. Kdyby totiž byl objem vody výrazně větší, obtekla by voda volně kámen a předala by mu jen nepatrnou část své energie. Výrazně menší objem vody by v reálné situaci sám jen těžko způsobil pohyb kamene. Předpokládejme tedy, že kamenem pohne kapalné těleso s objemem rovným A-násobku objemu kamene, kde A je nějaký empiricky zjistitelný součinitel (řádově blízký jedné), závisející na tvaru kamene (nikoliv na rychlosti vodního proudu). Jestliže se rychlost v vody o hustotě ϱ_v narážející na kámen sníží na nulu, koná toto kapalné těleso práci na úkor změny své kinetické energie:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\varrho_v A V v^2$$

Pokud chceme zjistit hraniční velikost kamenů, se kterými pohne vodní proud, musíme položit úbytek kinetické energie vodního tělesa rovnou přírůstku potenciální energie kamene (proud lehce unáší také menší kameny a kaménky, přitom zvyšuje nejen jejich potenciální, ale současně i kinetickou energii – uděluje jim rychlost):

$$\Delta E_p = \Delta E_k$$

$$\varrho_k V g \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) a = \frac{1}{2}\varrho_v A V v^2$$

Tuto rovnici vydělíme objemem V, vynásobíme dvěma a upravíme:

$$\varrho_k g \left(\sqrt{2}-1\right) a = \varrho_v A v^2$$

$$a = \frac{\varrho_v A}{\varrho_k g \left(\sqrt{2}-1\right)} v^2$$

Všechny veličiny v čitateli i ve jmenovateli zlomku jsou konstanty (připomeňme si: ϱ_v je hustota vody, ϱ_k je průměrná hustota kamene, A je empiricky zjistitelný koeficient závisející na tvaru kamene, g je normální tíhové zrychlení na povrchu Země). Lze tedy konstatovat, že lineární rozměry kamenů jsou přímo úměrné druhé mocnině rychlosti:

$$a \sim v^2$$

A protože objem kamenné krychle je $V = a^3$, umocníme obě strany úměrnosti na třetí a dostáváme vztah, který je matematickým vyjádřením Airyho zákona:

$$a^3 \sim v^6$$

$$V \sim v^6$$

A hmotnost kamene m je úměrná jeho objemu V:

$$m \sim v^6$$

Vzroste-li rychlost proudu n-krát, nabývá proud schopnosti unášet předměty n^6-krát těžší, čili hmotnost nejtěžších předmětů unášených proudem je přímo úměrná šesté mocnině rychlosti proudu.

Obr. 2: George Biddell Airy

Literatura

[1] Perelman, J. I.: *Zajímavá mechanika.* Mladá fronta, Praha, 1953.
[2] Kvapil, B. a kol.: *Malá československá encyklopedie, I. svazek A–Č.* Academia, Praha, 1984.