Jaroslav Švrček

O jedné úloze z ukrajinské MO

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 2, 5–11

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146295`

O jedné úloze z ukrajinské MO

Jaroslav Švrček, PřF UP Olomouc

Abstract. The article presents solutions of an interesting plane geometry problem used in the 47th Ukrainian Mathematical Olympiad (in 2007). The article consists of five various solutions by five different specialists in problem solving and problem posing.

Ve 47. ročníku ukrajinské matematické olympiády (v roce 2007) se pro žáky 9. ročníku (odpovídá zhruba kategorii B v naší matematické olympiádě) objevila mezi úlohami v závěrečné části soutěže následující planimetrická úloha:

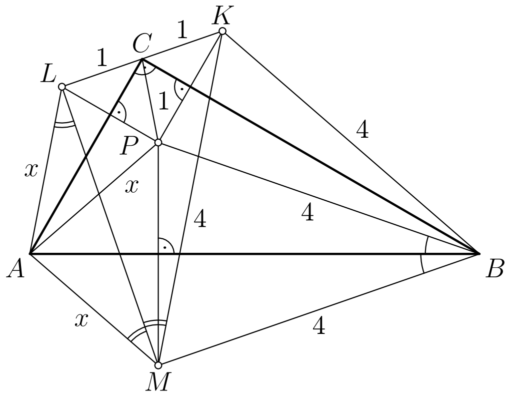
Uvnitř pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB a vnitřním úhlem při vrcholu A o velikosti 60° existuje bod P, pro který platí $|\sphericalangle APB| = 120^\circ$, $|BP| = 4$ a $|CP| = 1$. Určete délku úsečky AP.

Na první pohled se může zdát, že jde o poměrně snadnou úlohu, zvláště když byla určena soutěžícím nižší věkové kategorie. Na tomto místě doporučujeme čtenářům, aby se nejprve samostatně pokusili o řešení uvedené úlohy, a sami tak posoudili její obtížnost.

Ti, kteří tak učiní, se pravděpodobně také záhy přesvědčí o tom, že úloha rozhodně nepatří mezi snadné, a nejspíš se vrátí k pokračování v četbě tohoto článku. Jeho cílem je nabídnout čtenářům kromě autorova řešení úlohy také další originální a inspirativní řešení této úlohy, jejímiž autory jsou mj. někteří renomovaní řešitelé a tvůrci nadstandardních úloh pro matematické soutěže na středních školách.

Řešení úlohy: Označme x délku úsečky AP a K, L, M body souměrně sdružené s bodem P po řadě podle přímek BC, CA, AB. Uvažujme nyní trojúhelník KLM.

Protože vnitřní úhel při vrcholu C v trojúhelníku ABC je pravý, je s ohledem na použité osové souměrnosti podle přímek BC a CA úhel KCL jeho dvojnásobkem, tj. KCL je přímý úhel. Bod C je tudíž středem strany KL v trojúhelníku KLM a platí $|KL| = 2$ (obr. 1). Podobně trojúhelník LAM je rovnoramenný se základnou ML a vnitřním úhlem při jeho hlavním vrcholu A o velikosti $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$. Vzhledem k použitým osovým souměrnostem platí dále $|AM| = |AL| = |AP| = x$. Protože oba vnitřní úhly při základně ML uvažovaného rovnoramenného trojúhelníku LAM mají velikosti 30°, je $|ML| = x\sqrt{3}$.



Obr. 1

Konečně trojúhelník MBK je rovnostranný (rovnoramenný se základnou KM a velikostí $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ vnitřního úhlu při hlavním vrcholu B), a platí tedy $|BP| = |BM| = |BK| = |MK| = 4$. Nyní můžeme vyjádřit ještě velikost vnitřního úhlu při vrcholu M v trojúhelníku KLM. Platí

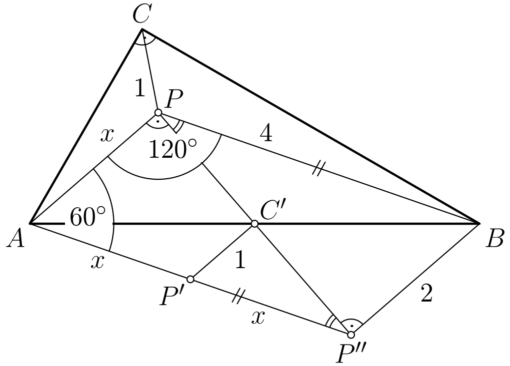
$$|\sphericalangle LMK| = |\sphericalangle AMB| - |\sphericalangle AML| - |\sphericalangle BMK| = 120^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Protože $|\sphericalangle LMK| = 30^\circ$ a $|KM| = 4$, má bod K od přímky LM vzdálenost 2, což je právě délka úsečky KL, takže KLM je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu L. Pro délku jeho odvěsny ML podle Pythagorovy věty platí $|ML| = 2\sqrt{3}$. Z druhé strany však již víme, že $|ML| = x\sqrt{3}$. Porovnáním obou výsledků bezprostředně obdržíme $x = |AP| = 2$. Tím je úloha vyřešena.

Poznámka: Jiná možnost, jak vyjádřit délky strany ML v trojúhelníku KLM, je využití kosinové věty v trojúhelníku KLM. Lze také využít skutečnosti, že $MKLA$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami MK a LA (obr. 1), odkud je patrné, že $x = 2$.

Jiné řešení (autorem je Josef Tkadlec, student G J. Keplera v Praze 6). Označme C' střed přepony AB uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku

ABC, jehož vrcholy jsou označeny (ve shodě s obr. 2) v matematicky kladném směru, a $x = |AP|$. Uvažujme nyní zobrazení v rovině, které je složeno z otočení $\mathsf{R}(A, -60°)$ a stejnolehlosti $\mathsf{H}(A, 2)$, tzv. *spirální podobnost*.



Obr. 2

V tomto zobrazení se bod P zobrazí nejprve pomocí otočení R na bod P', který se dále zobrazí ve stejnolehlosti H na bod P'', tj. platí $P \mapsto P' \mapsto P''$. Podobně $C \mapsto C' \mapsto B$ (obr. 2). Obrazem úsečky CP je v tomto zobrazení úsečka BP'', kde $|BP''| = 2$. Bod P' je přitom středem úsečky AP''. Přímky AP'' a PB jsou rovnoběžky, neboť platí

$$|\sphericalangle PAP''| + |\sphericalangle APB| = 60° + 120° = 180°.$$

Dále ukážeme, že $AP''BP$ je rovnoběžník. Protože trojúhelník APP' je rovnostranný, je $AP''P$ pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu P, neboť

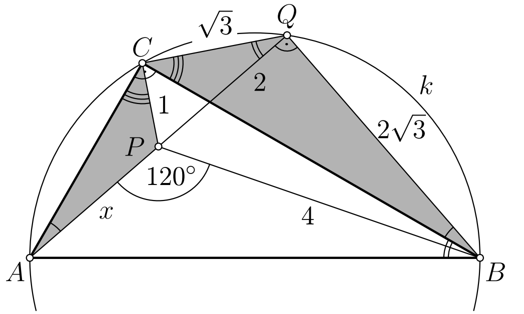
$$|P'P| = |P'A| = |P'P''| = x$$

(body A, P a P'' leží na Thaletově kružnici se středem v bodě P'). Navíc platí $|\sphericalangle AP''P| = |\sphericalangle BPP''| = 30°$. Trojúhelník BPP'' je však rovněž pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu P'', neboť $|BP| = 4$, $|BP''| = 2$ a $|\sphericalangle BPP''| = 30°$ (viz první řešení), a tudíž

$$|\sphericalangle AP''B| = |\sphericalangle AP''P| + |\sphericalangle BP''P| = 30° + 90° = 120°.$$

Čtyřúhelník $AP''BP$ je tedy rovnoběžník, v němž platí $|AP''| = |BP|$, tj. $2x = 4$. Úsečka AP má délku $x = 2$.

Jiné řešení (*autorem je Waldemar Pompe, Universytet Warszawski, Polsko*): Označme nejprve $x = |AP|$. Uvažujme Thaletovu kružnici k opsanou trojúhelníku ABC a označme Q druhý průsečík přímky AP s kružnicí k. Protože trojúhelník ABQ je pravoúhlý, je pravoúhlý rovněž trojúhelník PBQ. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu P v tomto trojúhelníku je rovna velikosti vnějšího úhlu při vrcholu P v trojúhelníku ABP, je tedy $|\sphericalangle BPQ| = 60°$. V pravoúhlém trojúhelníku PBQ tak máme $|PQ| = \frac{1}{2}|PB| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ a $|BQ| = 2\sqrt{3}$ (obr. 3).



Obr. 3

Na základě vlastností obvodových úhlů platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AQC| = 30°$. Odtud plyne, že trojúhelník PQC je pravoúhlý (s pravým úhlem při vrcholu C), neboť $|PC| = 1$, $|PQ| = 2$, $|\sphericalangle PQC| = |\sphericalangle AQC| = 30°$ (viz první řešení), a pro velikost jeho odvěsny CQ tedy platí $|CQ| = \sqrt{3}$.

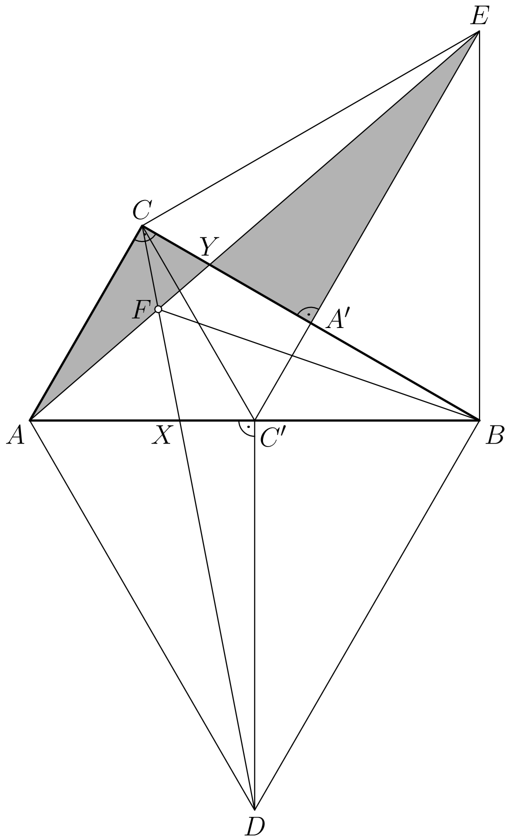
Protože dále $|\sphericalangle BCA| = 90° = |\sphericalangle QCP|$, jsou úhly ACP a QCB shodné. Z vlastností obvodových úhlů dále plyne, že také úhly CAP a CBQ jsou shodné. Platí totiž $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle CBQ|$. Odtud vidíme, že trojúhelníky CAP a CBQ jsou podobné, a pro odpovídající délky stran v těchto trojúhelnících proto platí

$$\frac{x}{1} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

a odtud přímo $x = 2$. Je tudíž $|AP| = 2$.

Jiné řešení (*autorem je Karel Horák z Matematického ústavu AV ČR v Praze*): Označme F vnitřní bod trojúhelníku ABC, z něhož jsou vidět všechny jeho strany pod úhlem 120° (tzv. *Fermatův bod*).

Označme D vrchol rovnostranného trojúhelníku vně připsaného přeponě AB a podobně E vrchol rovnostranného trojúhelníku vně připsaného odvěsně BC uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku ABC. Vzhledem k tomu, že D je střed oblouku AB kružnice opsané trojúhelníku ABF neobsahujícího bod F, je přímka FD osou úhlu AFB. Analogicky také přímka FE je osou úhlu BFC. Protože oba úhly AFB a BFC mají velikost $120°$, prochází přímka FD vrcholem C a podobně přímka FE prochází vrcholem A trojúhelníku ABC. Označme ještě X a Y průsečíky přímek CD a AE po řadě se stranami AB a BC. Konečně středy stran AB a BC označme po řadě C' a A' (obr. 4).



Obr. 4

Ukážeme, že platí $|CF| : |BF| = 1 : 4$. Vzhledem k tomu, že body E, A', C' leží na ose úsečky BC a přímky AC a BC jsou navzájem kolmé, jsou přímky AC a EA' rovnoběžky (obě kolmé k BC). Pravoúhlé trojúhelníky ACY a $EA'Y$ jsou proto stejnolehlé se středem stejnolehlosti Y a platí

$$|AC| : |EA'| = 2 : 3 = |CY| : |A'Y|,$$

neboť EA' je výškou z vrcholu E v rovnostranném trojúhelníku CBE. Protože Y je průsečíkem osy vnitřního úhlu při vrcholu F trojúhelníku BCF se stranou BC a bod A' je středem strany BC, dostáváme odtud*)

$$|CF| : |BF| = |CY| : |BY| = 2 : (3 + 5) = 2 : 8 = 1 : 4.$$

Dokázali jsme tak, že uvažovaný bod P vnitřku trojúhelníku ABC ze zadání úlohy je totožný s Fermatovým bodem tohoto trojúhelníku, tj. $F = P$.

Nyní zbývá stanovit poměr $|AF| : |BF| = |AX| : |BX|$. Ze stejnolehlosti trojúhelníků AXC a BXD (se středem stejnolehlosti X a s koeficientem stejnolehlosti -2) bezprostředně plyne

$$|AX| : |BX| = 1 : 2 = |AF| : |BF|.$$

Je proto $|AF| = |AP| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Předešlá čtyři řešení uvedené úlohy se opírala především o prostředky syntetické geometrie (shodná zobrazení, podobnost a stejnolehlost, vlastnosti obvodových úhlů apod.). Závěrem uvádíme ještě jedno, odlišné řešení této úlohy, které je naopak založeno především na výpočtu (kalkulativní řešení, algebraická metoda).

Další řešení (*autorem je Jaromír Šimša, Přírodovědecká fakulta MU, Brno*): Protože velikost vnitřního úhlu při vrcholu A v uvažovaném pravoúhlém trojúhelníku ABC je $60°$, označme $|AC| = b$ a $|AB| = 2b$. Dále nechť $|PA| = x$ a $\varphi = |\sphericalangle PAC|$. Pak platí $|\sphericalangle PAB| = 60° - \varphi$, a z trojúhelníku ABP tedy $|\sphericalangle PBA| = \varphi$ (obr. 5). Nyní (dvakrát) aplikujeme kosinovou větu v trojúhelníku ABP. Předně platí

$$(2b)^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4x \cos 120° = 16 + x^2 + 4x. \qquad (1)$$

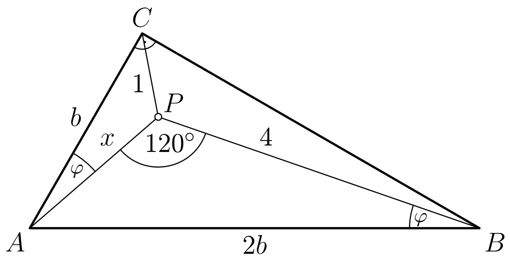
V tomtéž trojúhelníku platí ovšem (při zvoleném označení) také

$$x^2 = 4b^2 + 16 - 16b \cos \varphi. \qquad (2)$$

*) Osa vnitřního úhlu protíná protilehlou stranu trojúhelníku v bodě, který dělí tuto stranu v poměru délek přilehlých stran.

Využitím kosinové věty v trojúhelníku ACP dostaneme dále

$$1 = b^2 + x^2 - 2bx\cos\varphi. \tag{3}$$



Obr. 5

Ze vztahů (2) a (3) nejprve vyloučíme $\cos\varphi$. Platí

$$\frac{4b^2 + 16 - x^2}{16b} = \frac{b^2 + x^2 - 1}{2bx}.$$

Po úpravě pak dostaneme

$$4b^2x + (16 - x^2)x = 8b^2 + 8x^2 - 8.$$

Do posledního vztahu dosadíme z (1) za $4b^2$. Dostaneme tak rovnici

$$(x^2 + 4x + 16)x + (16 - x^2)x = 2(x^2 + 4x + 16) + 8x^2 - 8.$$

Po snadných úpravách, které ponecháváme čtenářům, dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 4x + 4 = 0$, která má dvojnásobný (reálný) kořen $x = 2$. Je tedy $|PA| = 2$.

Případná další zdařilá řešení této planimetrické úlohy, která zašlete do redakce našeho časopisu, rádi zveřejníme. Úlohy s příbuznou tematikou můžete najít mj. také v níže uvedených sbírkách [1] a [2].

Literatura

[1] Calda, E.: *Sbírka řešených úloh. Středoškolská matematika pod mikroskopem.* Prometheus, Praha, 2006.

[2] Švrček, J., Calábek, P: *Sbírka netradičních matematických úloh.* Prometheus, Praha, 2007.