Miroslava Jarešová

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 1, 62–64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146291

NAŠE SOUTĚŽ

V letošním ročníku v Rozhledech matematicko-fyzikálních otvíráme rubriku *Naše soutěž*. Není to úplně nová rubrika, protože v minulých letech měli čtenáři možnost otvírat rubriku se stejným názvem. Byla dlouholetou součástí Rozhledů v podstatě od jejich vzniku, v roce 1991 se ale její kontinuita přerušila.

V Naší soutěži budete nacházet dvojici úloh, většinou jedna bude matematická, druhá fyzikální. Budeme rádi, pokud některou z úloh vyřešíte a pošlete na adresu redakce její řešení. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené.

Vaše řešení budeme bodovat – za každou úlohu můžete obdržet maximálně 5 bodů. Výsledky jednotlivých řešitelů budeme sčítat a povedeme průběžnou výsledkovou tabulku. Budeme sčítat výsledky za všechny úlohy, nebudeme tedy rozlišovat matematiku od fyziky. Vždy zveřejníme jména všech řešitelů a průběžné výsledky. Nejlepším řešitelům bude s roční periodou zaslána matematická literatura.

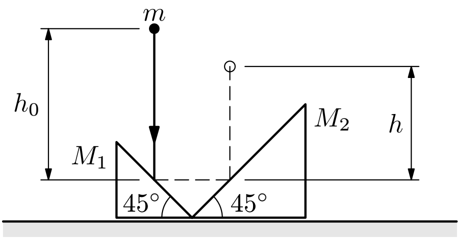
Nyní vám tedy předkládáme první dvě úlohy. Její řešení pošlete do *30. května 2009* na adresu redakce.

Úloha 1. V lichoběžníku $ABCD$ je K střed základny AB a L střed základny CD. Dokažte, že lichoběžníku $AKLD$ lze opsat kružnici, právě když $\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\beta$, kde α a β jsou vnitřní úhly při vrcholech A a B lichoběžníku. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 2. Na hladkém vodorovném ledě leží dva klíny o hmotnostech M_1 a M_2, jejichž úhly sklonu jsou 45° (obr. 1). Na první klín dopadne volným pádem kulička o hmotnosti m z výšky h_0. Tato kulička se od klínu dokonale pružně odrazí a dopadne na druhý klín, kde opět dojde k dokonale pružné srážce s klínem. Kulička potom vystoupí do výšky h.

a) Určete poměr výšek $\frac{h}{h_0}$.

b) Určete rychlost, s jakou se od sebe klíny vzdalují po odrazu kuličky od druhého klínu.



Obr. 1

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty

$$\frac{M_1}{m} = 10, \quad \frac{M_2}{M_1} = 2, \quad h_0 = 0{,}5 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Tření mezi ledem a klíny zanedbejte. (*Miroslava Jarešová*)

* * * * *

BINOMICKÁ VĚTA

Setkal jsem se na Hradčanech před Dómem
se svým starým dobrým známým binómem.
Prohodili jsme spolu pár binomických vět,
jak se nám od doby mládí značně změnil svět,
že už dneska ženský nejsou, co bejvaly dřív,
a že bude nejlíp zajít někam na pár piv.

Na ten večer vzpomínám pln dojetí,
jak jsme se tam umocnili na třetí!

Emil Calda[*)]

*) *Úvod do obecné teorie prostoru,* Karolinum, Praha, 2003

NÁVODY A ODPOVĚDI

„Odmocniny z přirozených čísel“

1. Z rovnosti $(b-3)\sqrt{a} = 4(b-3)$ plyne $b = 3$ nebo $a = 16$.

2. Z rovnosti $\sqrt{a}+\sqrt{b} = n$ upravené do tvaru $2n\sqrt{a} = n^2+a-b$ plyne, že $\sqrt{a}$ je racionální, a tedy přirozené číslo (podle Tvrzení 1); analogicky pro číslo $\sqrt{b}$.

3. Rovnost
$$\frac{a+b\sqrt{5}}{a+c\sqrt{5}} = x$$
upravte na $a(1-x) = (cx-b)\sqrt{5}$, odkud $cx-b = 0$, a tedy $a = 0$ nebo $x = 1$. Řešením úlohy jsou trojice (a,b,c) tvaru $(0,b,c)$, kde $c \neq 0$, a trojice tvaru (a,b,b), kde $(a,b) \neq (0,0)$.

4. Danou rovnost upravte na
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = 5\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right),$$
odkud plyne $\sqrt{a}-\sqrt{b} = 0$ (takže $a = b$) nebo $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 5$. Poslední rovnost je (podle úlohy č. 2) splněna jedině v případech, kdy $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ je dvojice čísel 1, 4 nebo 2, 3 (v jakémkoliv pořadí). Řešením úlohy jsou tedy právě dvojice (a,b) tvaru (a,a), $(1,16)$, $(16,1)$, $(4,9)$ a $(9,4)$.

5. a) Ukažte, že pro čísla $s_n = (7+\sqrt{48})^n + (7-\sqrt{48})^n$ platí $s_0 = 2$, $s_1 = 14$ a $s_{n+1} = 14s_n - s_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud tvrzení úlohy již snadno plyne indukcí.

   b) Označme $x = \sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Protože $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$, lze zkoumané číslo $s = \sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt[n]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ zapsat ve tvaru $s = x + x^{-1}$. Připustíme-li, že číslo s je racionální, pak z rovností
$$x^{k+1}+x^{-k-1} = \left(x^k+x^{-k}\right)\left(x+x^{-1}\right) - \left(x^{k-1}+x^{1-k}\right)$$
pro $k = 1,2,\ldots,n-1$ postupně dostaneme, že i čísla x^2+x^{-2}, x^3+x^{-3}, …, x^n+x^{-n} jsou racionální, což pro poslední z nich protiřečí zřejmé rovnosti $x^n+x^{-n} = 2\sqrt{3}$.