

Rozhledy matematicko-fyzikální

Úlohy domácího kola 59. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 1, 42–45

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146286>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2009

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SOUTĚŽE

Úlohy domácího kola 59. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Kategorie A

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{x^2 - y} = z - 1,$$

$$\sqrt{y^2 - z} = x - 1,$$

$$\sqrt{z^2 - x} = y - 1.$$

(*Radek Horenský*)

2. Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC , CD a označme po řadě R , S její průsečíky s přímkami AB , AD . Dokažte, že hodnota součinu

$$|BR| \cdot |DS|$$

na volbě tečny nezávisí.

(*Leo Boček*)

3. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíslný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat?

(*Peter Novotný*)

4. V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O , V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S , právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost 60° .

(*Tomáš Jurík*)

5. V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první, a aby si vzal přesně n -tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese.
(*Dag Hrubý*)

6. Pro dané prvočíslo p určete počet (všech) uspořádaných trojic (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, které splňují vztah

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,$$

kde $[x, y]$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y .

(*Tomáš Jurík*)

Kategorie B

1. Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné 2009, ve druhé 2010 a v poslední 2011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápalce. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru.
(*Ján Mazák*)
2. Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístní a právě dva dvojmístní. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána.
(*Peter Novotný*)
3. V rovině je dána úsečka AB . Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, pro jehož středy stran AB, CD, DA označené po řadě K, L, M platí: body A, B, L, D leží na jedné kružnici a rovněž body K, L, D, M leží na jedné kružnici.
(*Jaroslav Švrček*)
4. Najděte 2009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel. (*Radek Horenský*)

5. Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D . Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E . Dokažte, že trojúhelník se stranami délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný trojúhelníku ABD . *(Pavel Leischner)*
6. Reálná čísla a , b mají tuto vlastnost: rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.
- a) Dokažte nerovnost $b > 3$.
- b) Pomocí b vyjádřete kořeny obou rovnic. *(Jaromír Šimša)*

Kategorie C

1. Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“ s těmito pravidly: Hráč A si myslí slovo složené z pěti různých písmen. Hráč B vysloví libovolné slovo složené z pěti různých písmen a hráč A mu prozradí, kolik písmen uhodl na správné pozici a kolik na nesprávné. Písmena považujeme za různá, i když se liší jen háčkem nebo čárkou (například písmena A, Á jsou různá). Kdyby si hráč A myslel například slovo LOŤKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpoví hráč A, že jedno písmeno uhodl hráč B na správné pozici a dvě na nesprávné. Zkráceně sdělí „1 + 2“, neboť se opravdu obě slova shodují pouze v písmenu O včetně pozice (druhé zleva) a v písmenech K a L, jejichž pozice jsou odlišné. Erika si myslela slovo z pěti různých písmen a Klárka vyslovila slova KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tato slova v daném pořadí odpověděla 0 + 3, 0 + 2, 1 + 2, 2 + 0 a 1 + 2. Zjistěte, jaké slovo si Erika mohla myslet. *(Peter Novotný)*
2. Vrcholem C pravoúhelníku $ABCD$ vedte přímky p a q , které mají s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C , přičemž přímka p má od bodu A největší možnou vzdálenost a přímka q vymezuje s přímkami AB , AD trojúhelník co nejmenšího obsahu. *(Leo Boček)*
3. Určete všechna reálná čísla x , která vyhovují rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než číslo x , tzv. dolní celou část reálného čísla x .) *(Jaroslav Švrček)*

4. Kružnice $k(S; r)$ se dotýká přímky AB v bodě A . Kružnice $l(T; s)$ se dotýká přímky AB v bodě B a protíná kružnici k v krajních bodech C, D jejího průměru. Vyjádřete délku a úsečky AB pomocí poloměrů r, s . Dokažte dále, že průsečík M přímek CD, AB je středem úsečky AB . (Leo Boček)

5. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} \leq \frac{a + b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost.

(Ján Mazák)

6. Najděte všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná deseti a která ve svém dekadickém zápisu mají někde vedle sebe dvě nuly, po jejichž vyškrtnutí se původní číslo 89krát zmenší. (Jaromír Šimša)

Úlohy 50. ročníku fyzikální olympiády, kategorie G – Archimédiáda

Ivo Volf, Univerzita Hradec Králové a Ústřední komise FO

FO50G1 Třikrát o zvuku

- Když blesk rozčísne večer oblohu, hluk hromu nás dostihne až po době 15 s. Navrhni způsob, jak jednoduše odhadnout vzdálenost elektrického výboje.
- Stojíš-li před skalní stěnou a křikneš-li HEJ!, po době 1,8 s uslyšíš HEJ!, slabší sice, ale přece. Tento jev se nazývá odborně echo. Popiš ho, vysvětli, nazvi česky a odhadni vzdálenost skalní stěny.
- Kdysi se hloubky v moři měřily spouštěním olovnice. Dnes se užívá tzv. sonaru. Vysvětli stručně jeho činnost (najdi si třeba v encyklopedii nebo na internetu) a urči hloubku v moři, vrátí-li se signál z lodi za dobu 0,28 s. Proč je sonar nepříjemný některým živočichům?