Radka Smýkalová
Čtyři trigonometrické nerovnosti

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 4, 1–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146263

Čtyři trigonometrické nerovnosti

Radka Smýkalová, PřF MU Brno

Zadání problému

Na střední škole se seznamujeme s goniometrickými funkcemi a vzorci, následně pak se dvěma větami, které udávají vztahy mezi délkami stran a velikostmi úhlů v libovolném trojúhelníku – sinovou a kosinovou větou. Když na tabuli učitel vypočítá poslední příklad z učebnice a vyčerpá tak její obsah, nejeden zvídavý student může položit otázku, zda pro hodnoty goniometrických funkcí na vnitřních úhlech trojúhelníku platí nějaké rovnosti a nerovnosti. Učitelova odpověď bude třeba i kladná, avšak nejspíše nás žádným takovým vztahem hned neobohatí. Možná se na příští hodině několik takových rovností a nerovností dozvíme ([2] a [3]). Horší to bude s jejich důkazy, které se neobejdou bez složitých goniometrických úprav a užití Cauchyovy či Jensenovy nerovnosti, které nás nejspíše od hlubšího studia trigonometrie odradí.

V následujícím textu se můžete těšit na konkrétní čtyři trigonometrické nerovnosti a na jejich nevídané důkazy, které byly označeny autorem [1] za nejkratší, které kdo kdy demonstroval. Možná jim sami přidáte ještě přívlastky důmyslné a matematicky krásné. Všechny budou založeny na využití známé jednoduché nerovnosti

$$2uv \leq u^2 + v^2, \tag{$*$}$$

která platí pro libovolná reálná čísla u a v. Těm, kteří ihned platnost nerovnosti $(*)$ nevidí, napovězme, že je ekvivalentní s nerovností

$$0 \leq (u - v)^2.$$

Slíbené nerovnosti, jejichž důkazy se budeme zabývat, jsou následujících tvarů

$$S_1 = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}\,, \tag{1}$$

$$S_2 = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}\,, \tag{2}$$

$$S_3 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\,, \tag{3}$$

$$S_4 = \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\,, \tag{4}$$

kde α, β, γ jsou vnitřní úhly libovolného trojúhelníka. Sami jistě rychle zjistíte, že v případě rovnostranného trojúhelníka nastane ve všech čtyřech vztazích rovnost. Proto nerovnosti (1)–(4) určují *největší možné* hodnoty trigonometrických součtů, které jsme označili S_1 až S_4.

Zamysleme se nejprve nad tím, zda je některá z nerovností (1)–(4) důsledkem jiné. Odpověď zní ano. Dokonce jsou takové nerovnosti dvě. Proč tomu tak je? Jsou-li α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníka T, pak úhly $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ jsou kladné a jsou to vnitřní úhly některého trojúhelníka T', neboť pro jejich součet platí

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Co to pro naše nerovnosti znamená? Dokážeme-li nerovnosti (1) a (3) pro všechny trojúhelníky, nebudeme muset dokazovat nerovnosti (2) a (4), které jsou pro trojúhelník T díky rovnostem

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

důsledky nerovností (1) a (3) pro trojúhelník T'.

Zaměříme svoji pozornost nejdříve na nerovnost (1), jejíž důkaz bude snadnější než u nerovnosti (3). Dříve než v něm uplatníme nerovnost $(*)$, provedeme všeobecně užitečnou úpravu: do dokazovaného vztahu dosadíme např. za γ hodnotu $180^\circ - \alpha - \beta$, a tak přejdeme ke vztahu, ve kterém budou vystupovat již pouze dvě (nezávislé) veličiny α a β.

Důkaz nerovnosti (1): Abychom se vyhnuli počítání se zlomky, místo (1) budeme dokazovat nerovnost $2S_1 \leq 3$. S využitím známých vzorců

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \text{ a } \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$$

můžeme hodnotu $\cos\gamma$ vyjádřit ve tvaru

$$\cos\gamma = \cos[\pi - (\alpha+\beta)] = -\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta.$$

Proto pro výraz $2S_1$ platí

$$2S_1 = 2(\cos\alpha + \cos\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta - 2\cos\alpha\cos\beta. \tag{5}$$

Nyní využijeme nerovnost $(*)$ pro $u = \cos\alpha + \cos\beta$ a pro $v = 1$, poté pro $u = \sin\alpha$ a $v = \sin\beta$. Dostaneme dvojici nerovností

$$\begin{gathered} 2(\cos\alpha + \cos\beta)\cdot 1 \leq (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + 1^2, \\ 2\sin\alpha\sin\beta \leq \sin^2\alpha + \sin^2\beta. \end{gathered}$$

Sečtením a následnou úpravou pravé strany obdržíme

$$\begin{gathered} 2(\cos\alpha + \cos\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta \leq (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + 1 + \sin^2\alpha + \sin^2\beta = \\ = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + 1 + \sin^2\alpha + \sin^2\beta. \end{gathered}$$

Zde využijeme vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pro $x = \alpha$ a $y = \beta$ a získáme tak nerovnost

$$2(\cos\alpha + \cos\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta \leq 3 + 2\cos\alpha\cos\beta,$$

která je podle (5) ekvivalentní s nerovností $2S_1 \leq 3$, kterou jsme chtěli dokázat.

Nyní nás čeká důkaz nerovnosti (3). Otázka zní, zda můžeme použít prakticky týž postup jako u předchozího důkazu. Necháme na samotném čtenáři, aby ověřil, že tudy stejně jednoduchá cesta nevede. Uvidíme, že k dosažení cíle budeme muset uplatnit nerovnost $(*)$ daleko rafinovanějším způsobem.

Důkaz nerovnosti (3): Aby v nerovnosti (3) vystupovaly pouze dvě nezávislé veličiny α a β, s využitím známých vzorců

$$\sin(\pi - x) = \sin x \ \text{ a } \ \sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

vyjádříme hodnotu $\sin\gamma$ ve tvaru

$$\sin\gamma = \sin[\pi - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Když ještě obě strany nerovnosti (3) vynásobíme číslem 2, budeme dokazovat nerovnost

$$2\sin\alpha + 2\sin\beta + 2\sin\alpha\cos\beta + 2\cos\alpha\sin\beta \leq 3\sqrt{3}. \tag{6}$$

Nabízí se myšlenka: *každý* ze čtyř členů levé strany nerovnosti (6) odhadnout pomocí nerovnosti ($*$). Tedy

$$\begin{aligned}2\sin\alpha\cdot 1 &\le \sin^2\alpha + 1,\\ 2\sin\beta\cdot 1 &\le \sin^2\beta + 1,\\ 2\sin\alpha\cos\beta &\le \sin^2\alpha + \cos^2\beta,\\ 2\cos\alpha\sin\beta &\le \cos^2\alpha + \sin^2\beta.\end{aligned}$$

Sečtením všech čtyř nerovností a následnou úpravou pravé strany obdržíme

$$\begin{aligned}&2\sin\alpha + 2\sin\beta + 2\sin\alpha\cos\beta + 2\cos\alpha\sin\beta \le\\ &\le 2 + 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta + 1\cos^2\alpha + 1\cos^2\beta.\end{aligned} \tag{7}$$

Díky goniometrickým jedničkám bychom se funkcí na pravé straně nerovnosti (7) zbavili jedině tehdy, kdyby se koeficient u výrazu $\sin^2\alpha$ rovnal koeficientu u výrazu $\cos^2\alpha$ a zároveň by se rovnaly koeficienty u výrazů $\sin^2\beta$ a $\cos^2\beta$. To ovšem jak v prvním, tak ve druhém případě neplatí, neboť $2 \neq 1$.

Neklesejme na mysli! Myšlenka odhadnout všechny čtyři členy levé strany nerovnosti (6) pomocí nerovnosti ($*$) je správná. Jen musíme jednotlivé členy *rozšířit* vhodnými zlomky. A to takovými, aby se v závěru sobě rovnaly příslušné koeficienty. Zvolíme proto kladná čísla t a r, první dva členy rozšíříme zlomkem $\frac{t}{t}$, druhé dva členy rozšíříme zlomkem $\frac{r}{r}$ a každý upravený člen odhadneme pomocí nerovnosti ($*$). Tím získáme

$$\begin{aligned}2\sin\alpha &= \frac{2}{t}(t\cdot\sin\alpha) \le \frac{1}{t}(t^2 + \sin^2\alpha),\\ 2\sin\beta &= \frac{2}{t}(t\cdot\sin\beta) \le \frac{1}{t}(t^2 + \sin^2\beta),\\ 2\sin\alpha\cos\beta &= 2r\left(\frac{\sin\alpha}{r}\cdot\cos\beta\right) \le r\left(\frac{\sin^2\alpha}{r^2} + \cos^2\beta\right),\\ 2\cos\alpha\sin\beta &= 2r\left(\frac{\sin\beta}{r}\cdot\cos\alpha\right) \le r\left(\frac{\sin^2\beta}{r^2} + \cos^2\alpha\right).\end{aligned}$$

Po sečtení všech čtyř nerovností a úpravě pravé strany obdržíme

$$\begin{aligned}&2\sin\alpha + 2\sin\beta + 2\sin\alpha\cos\beta + 2\cos\alpha\sin\beta \le\\ &\le 2t + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r}\right)\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r}\right)\sin^2\beta + r\cos^2\alpha + r\cos^2\beta.\end{aligned}$$

Potřebujeme, aby se sobě rovnaly jisté koeficienty a aby se pak celá pravá strana odvozené nerovnosti rovnala číslu $3\sqrt{3}$. Obě podmínky vyjádříme soustavou dvou rovnic o dvou neznámých t a r ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}+\frac{1}{r}&=r,\\ 2t+2r&=3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Přesvědčete se dosazením, že soustavě vyhovuje dvojice kladných čísel

$$t=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad r=\sqrt{3}.$$

(Máte-li chuť, můžete sami soustavu vyřešit.) Tím je důkaz nerovnosti (6), na kterou jsme převedli nerovnost (3), ukončen.

Jednoduché, nemyslíte? Nejspíš se vám honí hlavou myšlenka, jak asi vypadají ty těžší, obvykle uváděné důkazy, které se neobejdou bez složitých goniometrických úprav. Abyste sami mohli posoudit jejich složitost a naopak jednoduchost a krásu důkazů, které jsme výše podrobně vyložili, naznačíme alespoň stručně jejich postup podle [2].

Důkaz nerovnosti (1) a (3) klasickým způsobem: Nám všem známou kosinovou větu pro trojúhelník ABC zapíšeme ve tvaru

$$a^2=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

z něhož plyne první ze tří nerovností (další dvě jsou analogické)

$$\sin\frac{\alpha}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}},\quad \sin\frac{\beta}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}},\quad \sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ac}}.$$

Jejich vynásobením dostaneme odhad

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8},$$

který se stane výchozím bodem důkazů nerovností (1) a (3). První z nich pak přímo plyne z pozoruhodné rovnosti pro obecný trojúhelník

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \tag{8}$$

Druhá z nich z obdobné rovnosti

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \tag{9}$$

z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice čísel $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\beta}{2}$, $\cos^2\frac{\gamma}{2}$ a dále z nerovnosti, která má tvar

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \le \frac{9}{4}. \tag{10}$$

Ze dvou posledně zmíněných nerovností totiž obdržíme

$$3\sqrt[3]{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}} \le \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \le \frac{9}{4}$$

a vynecháním prostředního členu po úpravě dostaneme nerovnost

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

která spolu se vztahem (9) dokazuje nerovnost (3). Zbývá tedy vysvětlit, proč platí nerovnost (10). Přesvědčete se sami, že po trojím užití vzorce $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$ přejde nerovnost (10) v nerovnost (1), kterou jsme již pomocí (8) dokázali.

Nepřipadá vám to dosti složité? Navíc mnozí z vás by ještě mohli mít výhrady k tomu, že jsme rovnosti (8) a (9) v důkaze považovali za fakt, ovšem pro úplnost bychom je měli rovněž dokázat. Tehdy by byly důkazy nerovností (1) a (3) ještě složitější.

V samotném závěru se ještě jednou vraťme k přechodu od trojice závislých úhlů α, β, γ ke dvojici nezávislých úhlů α, β, který jsme použili v každém z obou neklasických důkazů. Abyste se přesvědčili o užitečnosti této metody, nabídneme vám několik pěkných vztahů platných v obecném trojúhelníku, jejichž důkazy můžeme provést právě uvedeným přechodem.

Cvičení: Dokažte, že pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného trojúhelníku ABC platí:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}\gamma\,,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1\,,$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\,,$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

Jsou vám poslední dvě rovnosti povědomé? Ano, jsou to právě klíčové vztahy (8) a (9), u kterých nám v předchozím textu chyběl důkaz. Díky vaší píli už vám chybět nebude!

Literatura

[1] Phuong, T.: *Diamonds in mathematical inequalities.* A Phi Printing Joint Stock Co., Hanoi, 2007.
[2] Horák, S.: *Nerovnosti v trojúhelníku.* Praha, 1986.
[3] Švrček, J.: *Geometrie trojúhelníka.* Praha, 1988.

Prvočíselná dvojčata a jejich zobecnění

Julius Okoš, VZP ČR Praha

Jak známo, prvočíselnými dvojčaty rozumíme prvočísla, jejichž rozdíl je 2. Čtenář si jistě okamžitě vybaví například dvojice prvočísel $\{3; 5\}$, $\{5; 7\}$, $\{11; 13\}$ atd. Při hledání nových prvočíselných dvojčat v posledních letech sehrává zásadní roli výpočetní technika. Přestože se prvočíselná dvojčata vyskytují poměrně často prakticky v celém dosud probádaném úseku prvočísel, není dodnes známo, zda je jich konečně nebo nekonečně mnoho. Je to jeden z nejznámějších nevyřešených problémů teorie čísel. O něm a dalších „prvočíselných" zajímavostech se dočtete na stránkách `http://primes.utm.edu`, kde je také umístěna tabulka prvních 100 000 prvočíselných dvojčat. Největší dosud známá prvočíselná dvojčata objevená 15. 1. 2007 mají v desítkové soustavě po 58 711 číslicích.

Co však můžeme říci o dvojicích po sobě jdoucích prvočísel, která jsou od sebe vzdálená o 4, jako jsou např. dvojice $\{7; 11\}$, $\{13; 17\}$, $\{19; 23\}$, $\{37; 41\}$? Vyskytují se tyto dvojice „do nekonečna"? Co můžeme říci o dvojicích po sobě jdoucích prvočísel $\{23; 29\}$, $\{31; 37\}$, $\{47; 53\}$, $\{53; 59\}$ atd., která jsou od sebe vzdálena o 6? A co můžeme říci o dvojicích $\{89; 97\}$, $\{359; 367\}$, $\{389; 397\}$, $\{401; 409\}$, která jsou od sebe vzdálena o 8? Je jich nekonečně mnoho?

Takto se dostáváme k hypotéze, že pro libovolné přirozené číslo n existuje nekonečně mnoho dvojic po sobě jdoucích prvočísel vzdálených od sebe o $2n$. O její pravdivosti není nic známo ani pro jednu hodnotu n.