

Rozhledy matematicko-fyzikální

Oldřich Lepil
Stroj na katastrofy

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 2, 15–21

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146244>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Stroj na katastrofy

Oldřich Lepil, PřF UP Olomouc

Nemějte obavy, že vám nabídneme zařízení, kterým by bylo možné vyvolat zemětřesení, tsunami nebo srážku Země s kometou. Maximálně dojde k chaosu, poněvadž chaos a katastrofa jsou klíčové pojmy teorií, které se rozvinuly ve 2. polovině 20. století jako důsledek nových možností podmíněných vývojem moderní výpočetní techniky. Tyto teorie se nazývají *deterministický chaos* a navazující problematiku řeší *teorie katastrof*. Deterministický chaos se zabývá zdánlivě chaotickými ději v různých soustavách – mechanických, elektrických, biologických, ekonomických i společenských, které mají nelineární vlastnosti. Jsou to soustavy, pro něž neplatí známé „jak se do lesa volá, tak se z něho ozývá“. Malé změny (*fluktuace*) v počátečních podmínkách nebo parametrech soustavy mají díky její nelinearitě za následek nepředvídatelný další průběh chování. Změny v chování soustavy mohou být tak zásadní, že je můžeme označit jako katastrofu. Ukážeme si to na konkrétním příkladu, ale nejprve si připomeneme vlastnosti tak jednoduché soustavy, jakou je pružinový oscilátor (závaží o hmotnosti m zavěšené na pružině o tuhosti k).

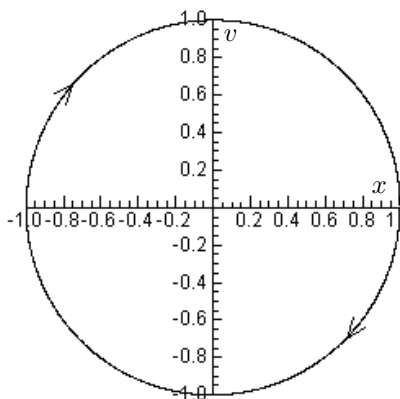
V ideálním případě se oscilátor pohybuje působením síly $F = -kx$ a jeho pohyb je harmonický. Na skutečný oscilátor však vždy působí odporová síla, jejíž velikost je nejčastěji přímo úměrná rychlosti v oscilátoru, takže $F = -kx - bv$. Kmitání oscilátoru je pak tlumené. V obou případech je chování oscilátoru popsáno lineárními rovnicemi, takže při známých počátečních hodnotách výchylky a rychlosti lze přesně popsat, jak bude kmitání probíhat. Takový děj označíme jako deterministický.

Na oscilátor také může působit vnější síla, která nahradí ztráty energie vzniklé tlumením, nebo dokonce způsobí, že se amplituda kmitání oscilátoru bude zvětšovat. Budeme uvažovat vnější harmonickou sílu $F_v = F_m \cos \omega t$, která vzbudí nucené kmitání oscilátoru. Celková síla působící na oscilátoru bude

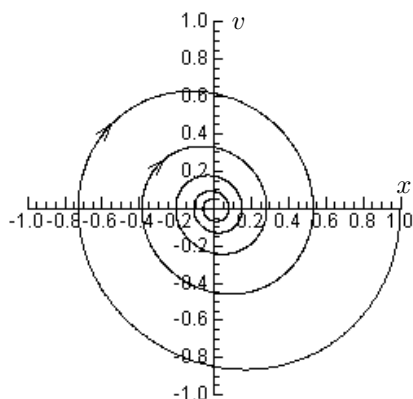
$$F = -kx - bv + F_m \cos \omega t. \quad (1)$$

Kmitání oscilátoru nejlépe posoudíme vytvořením grafu, v němž souřadnici x tvoří výchylka oscilátoru a souřadnici y jeho rychlost v . Takovému grafu budeme říkat *fázový diagram* a je to něco jako „portrét“

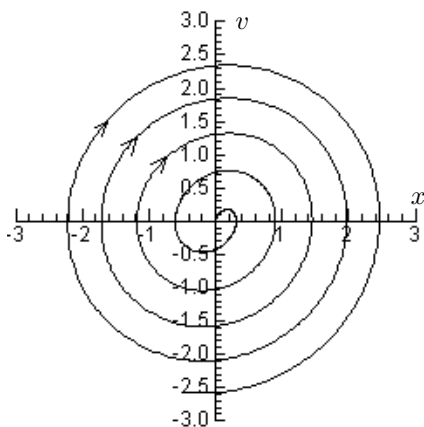
chování oscilátoru v delším časovém úseku. Na obr. 1 jsou fázové diagramy netlumeného oscilátoru (a), tlumeného oscilátoru (b) a oscilátoru, který podle rovnice (1) koná kmity s narůstající amplitudou (c).



Obr. 1a



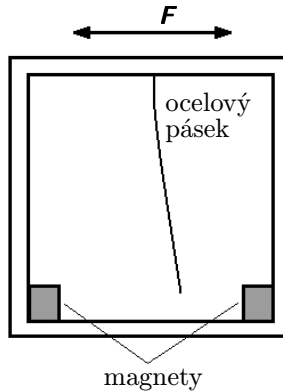
Obr. 1b



Obr. 1c

V prvních dvou případech vykazuje oscilátor známky stability, jeho fázový diagram tvoří uzavřená jednoduchá křivka nebo diagram směřuje do jednoho bodu, který odpovídá klidu v rovnovážné poloze ($x = 0$, $v = 0$), ve třetím případě je systém nestabilní, amplituda kmitů stále roste a v reálném případě by mohlo dojít i k destrukci systému, čili ke katastrofě. Fázový diagram ukazuje, kam systém dlouhodobě směřuje,

jako by byl ke konečnému stavu přitahován (angl. attracted), proto se fázové portréty různých oscilátorů, ale i mnoha dalších systémů označují termínem *atraktor*.



Obr. 2

V tomto článku si ukážeme, jak vypadá atraktor zvláštního oscilátoru, jehož schematické vyobrazení je na obr. 2. Oscilátorem je ocelový pásek uchycený v držáku, v jehož spodní části jsou dva magnety. Periodická síla F vynucuje kmitání pásku, které je ovlivňováno působením magnetické síly v poli dvou magnetů. Popsané zařízení se označuje jako *Duffingův oscilátor* podle německého inženýra Duffinga, který v roce 1914 teoreticky popsal kmitání takového oscilátoru rovnicí, která se od rovnice (1) liší tím, že má ještě jeden člen, který je úměrný x^3 , a člen kx má kladné znaménko. Duffingova rovnice (podrobněji o ní na <http://mathworld.wolfram.com/DuffingDifferentialEquation.html>) má tvar

$$F = kx - cx^3 - bv + F_m \cos \omega t. \quad (2)$$

Jde tedy o nelineární rovnici, jejímž řešením nelze získat jednoduchý vztah spojitě popisující kmitání tohoto oscilátoru. Potřebné údaje o okamžité poloze ocelového pásku a rychlosti jeho kmitání najdeme tak, že budeme jednotlivé veličiny počítat po malých časových úsecích (označíme je *časový krok* h). Tím získáme řadu diskrétních hodnot obou veličin a z nich sestavíme fázový portrét oscilátoru. Je samozřejmé, že tisíce potřebných hodnot získáme jedině pomocí počítače.

Počítačový model oscilátoru vytvoříme na základě rovnice (2). K tomu použijeme software Modelování (*Modeling*) systému určeného především

pro podporu experimentů Coach 5, přičemž vystačíme s demoverzí programu, kterou lze stáhnout z <http://www.cma.science.uva.nl/>. Demoverze je plně funkční, jen neumožňuje uložení vytvořeného modelu, který však lze zkopírovat jako textový soubor a uložit.

Základem modelu je výraz pro zrychlení a ($a = F/m$) pohybu oscilátoru. Pro jednoduchost zvolíme $m = 1$, $k = 1$ a $c = 1$, takže z rovnice (2) dostaneme

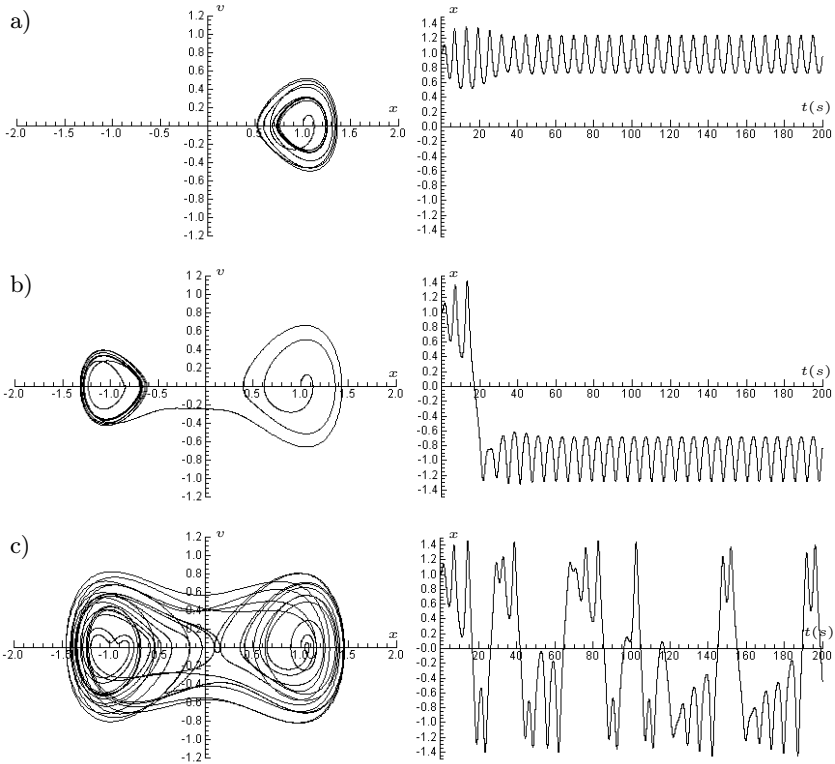
$$a = x - x^3 - bv + F_m \cos \omega t. \quad (3)$$

Kmitání budeme modelovat pro tři blízké hodnoty amplitudy síly $\{F_m\} \sim 0,23, 0,25$ a $0,27$ a pro úhlovou frekvenci nuceného kmitání $\{\omega\} = 1$. Součinitel tlumení oscilátoru zvolíme $\{b\} = 0,25$. Model pro program Coach 5 je v tabulce.

Model	Proměnné a počáteční hodnoty
$a=x-x^3-b*v+F_m*\cos(\omega*a*t)$	$b=0.25$
$x=x+v*h$	$F_m=0.23$
$v=v+a*h$	$\omega=1$
$t=t+h$	$h=0.02$
	$x=1$
	$v=0$
	$t=0$

Fázové diagramy kmitání Duffingova oscilátoru, čili jeho atraktory jsou na obr. 3 vlevo. Vpravo je časová závislost výchylky oscilátoru. Vidíme, že při nejmenší zvolené hodnotě amplitudy vnější síly se po krátké době kmity pásku ustálí kolem rovnovážné polohy v blízkosti pravého magnetu, kde se pásek nacházel v počátečním okamžiku. Při malém zvětšení amplitudy systém přejde skokem na opačnou stranu a pásek kmitá kolem symetricky položené druhé rovnovážné polohy u levého magnetu. Při dalším zvětšení amplitudy se však kmitání pásku mění na chaotické a oscilátor chaoticky střídá kmitání kolem obou rovnovážných poloh.

Zařízení slouží jako „stroj na katastrofy“ v tom smyslu, že na konkrétním případě ilustruje, jak malá změna vnějšího působení může vyvolat skokovou změnu v chování systému, což se označuje jako katastrofa. Vznik katastrof tohoto druhu je charakteristický pro systémy, jejichž chování je popsáno rovnicemi (jde v podstatě o diferenciální rovnice) obsahujícími nelineární členy. Vlivem nelinearity se při postupných malých změnách parametrů v určitém okamžiku skokem změny pohybový stav soustavy a oscilátor začne kmitat kolem jiné rovnovážné polohy.



Obr. 3

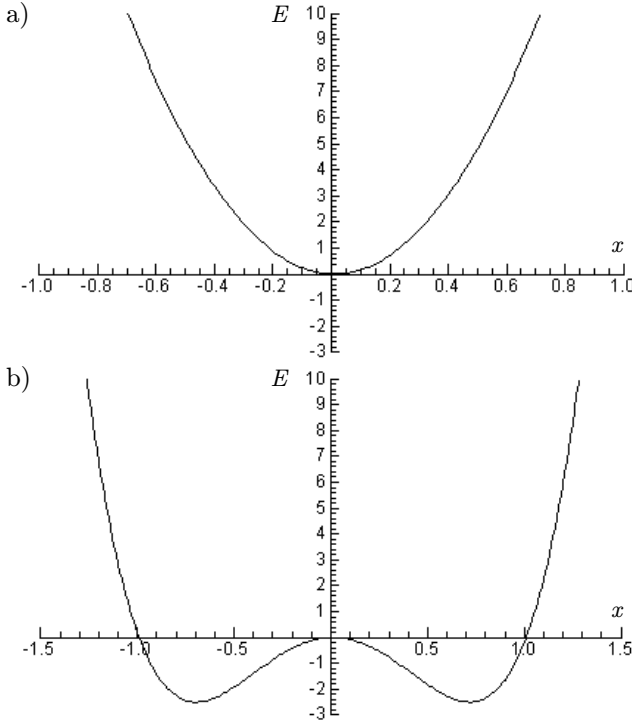
Nemáte-li možnost vytvořit si počítačový model Duffingova oscilátoru a studovat jeho chování při změnách parametrů a počátečních podmínek, můžete použít k ilustraci chování tohoto systému aplet dostupný na <http://www.math.udel.edu/~hsiao/m302/JavaTools/osduffng.html>.

Pro pochopení vlastností Duffingova oscilátoru a obecnějších závěrů, které z jeho kmitání vyplývají, si ukážeme souvislost s potenciální energií oscilátoru. U jednoduchého pružinového oscilátoru je potenciální energie pružnosti oscilátoru vyjádřena vztahem

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2,$$

což odpovídá práci vykonané silou $F = -kx$, která je tedy lineární funkcí výchylky. Grafem závislosti potenciální energie na výchylce z rovnovážné

polohy je parabola na obr. 4a. Graf bychom mohli interpretovat jako potenciálovou jámu, jakýsi virtuální „důlek“ s parabolicky zakřivenými stěnami, podél nichž se pohybuje kulička. Vlivem tření o stěny bude kulička vystupovat do stále menší výšky, až nastane rovnovážný stav, při němž spočine na dně jámy, jak to odpovídá atraktoru na obr. 1b.



Obr. 4

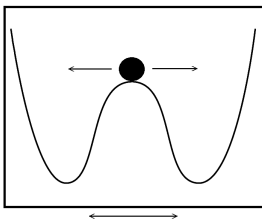
U Duffingova oscilátoru silové pole magnetů způsobuje, že k síle, která je lineární funkcí výchylky, přibude síla závisející na třetí mocnině výchylky, tzn. $F = \pm kx - cx^3$. Pro potenciální energii Duffingova oscilátoru platí vztah

$$E_{pd} = \pm \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}cx^4.$$

Graf je na obr. 4b (byl rovněž vytvořen programem Coach 5 pro $\{k\} = -20$ a $\{c\} = 40$). Vidíme, že křivka má dvě minima odpoví-

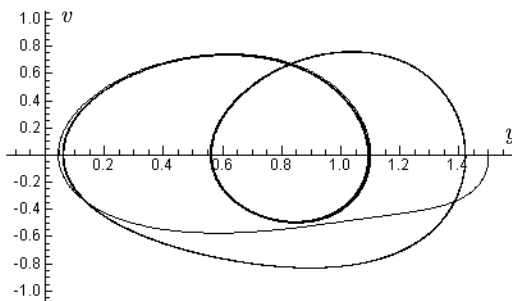
dající dvěma možným rovnovážným polohám, tzn. blíže k levému, resp. pravému, magnetu.

Při určitých hodnotách úhlové frekvence budící síly, její amplitudy a tlumení oscilátoru může nastat stacionární stav charakteristický dvěma stabilními frekvencemi kmitání oscilátoru (obr. 5).



Obr. 5

Dochází tedy k jakémusi rozdvojení frekvence, s níž oscilátor kmitá. To se projeví na tvaru fázového diagramu, který sice tvoří uzavřená křivka, ale je dvojitá (obr. 6). Toto rozdvojení period dějů v nějakém systému se označuje termínem *bifurkace* a je pro systémy, které studuje teorie deterministického chaosu, charakteristická.



Obr. 6

Systémů, které za jistých podmínek vykazují chaotické chování, je značný počet. Modely celé skupiny takových oscilujících systémů lze najít např. na <http://www.myphysicslab.com/index.html>. Chaos však v tomto případě neznamená nahodilé (*stochastické*) chování. Nahodile se mění např. jen počáteční podmínky, avšak pro určité hodnoty těchto podmínek je další vývoj systému již přesně určen, čili determinován. Teorie deterministického chaosu tak studuje chování, popř. i řízení systémů, které jsou v přírodě i v mnoha dalších oblastech široce zastoupeny.