Úlohy domácího kola 58. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 1, 37–40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146235

Úlohy domácího kola 58. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Kategorie A

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$2\sin x\cos(x+y)+\sin y=1,$$
$$2\sin y\cos(y+x)+\sin x=1.$$

(*Jaroslav Švrček*)

2. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD. (*Tomáš Jurík*)

3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

je prvočíslo. (*Ján Mazák*)

4. Uvažujme nekonečnou aritmetickou posloupnost

$$a, a+d, a+2d, \dots, \qquad (*)$$

kde a, d jsou přirozená (tj. kladná celá) čísla.

a) Najděte příklad posloupnosti (∗), která obsahuje nekonečně mnoho k-tých mocnin přirozených čísel pro všechna $k=2,3,\dots$

b) Najděte příklad posloupnosti (∗), která neobsahuje žádnou k-tou mocninu přirozeného čísla pro žádné $k=2,3,\dots$

c) Najděte příklad posloupnosti (∗), která neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla, ale obsahuje nekonečně mnoho třetích mocnin přirozených čísel.

d) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla a, d, k ($k > 1$) platí: Posloupnost ($*$) buď neobsahuje žádnou k-tou mocninu přirozeného čísla, anebo obsahuje nekonečně mnoho k-tých mocnin přirozených čísel. (*Jaroslav Zhouf*)

5. V každém vrcholu pravidelného 2008úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:
a) na 8 hromádek po 251 minci,
b) na 251 hromádek po 8 mincích. (*Radek Horenský*)

6. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř stran AC, BC jsou dány body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M střed strany AB a P průsečík přímek AD a BE. Dokažte, že obraz bodu P v středové souměrnosti se středem M leží na ose úhlu ACB. (*Ján Mazák*)

Kategorie B

1. Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo dělitelné osmi, jehož poslední číslice je 8. Kdybychom poslední číslici nahradili číslicí 7, získali bychom číslo dělitelné devíti. Kdybychom však poslední číslici nahradili číslicí 9, získali bychom číslo dělitelné sedmi. Určete číslo, které je napsané na tabuli. (*Peter Novotný*)

2. Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro které platí

$$x^2 + xy = y^2 + z^2,$$
$$z^2 + zy = y^2 + x^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

3. Na straně BC, resp. CD rovnoběžníku $ABCD$ určete body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD byly rovnoběžné a trojúhelníky ABE, AEF a AFD měly stejné obsahy. (*Jaroslav Zhouf*)

4. Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli. (*Ján Mazák*)

5. Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa strany AB protne kružnici k v bodě K, který leží v polorovině opačné k polorovině ABC. Osy stran AC a BC protnou přímku CK po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné. (*Leo Boček*)

6. Najděte všechny dvojice celých čísel (m, n), pro něž je hodnota výrazu

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo. (*Vojtech Bálint*)

Kategorie C

1. Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz? (*Peter Novotný*)

2. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC. (*Pavel Leischner*)

3. Najděte všechna čtyřmístná čísla n, která mají následující tři vlastnosti: V zápise čísla n jsou dvě různé číslice, každá dvakrát. Číslo n je dělitelné sedmi. Číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n, je rovněž čtyřmístné a dělitelné sedmi. (*Pavel Novotný*)

4. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na polopřímce BC sestrojte takový bod G, aby obsah trojúhelníku ABG byl shodný s obsahem daného pětiúhelníku. (*Lucie Růžičková*)

5. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. (Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje.) (*Jaromír Šimša*)

6. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(*Jaromír Šimša*)

Návody ke cvičením: „O důkazech zajímavých číselných rovností“

1. Při důkazu (1) nejprve vyjádřete $\operatorname{tg}(60° \pm 20°)$. K důkazu rovnosti (2) použijte vzorec
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$
K důkazu (3) použijte vzorec $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.
2. Vraťte se znovu ke trojúhelníku ABC na obrázku u příkladu 2.
3. K důkazu (10) použijte substituce $x = \sin^2 20°$, $y = \sin^2 40°$ a $z = \sin^2 80°$. Dále pomocí úprav dokažte samostatně každou z rovností
$$xyz = \frac{3}{64}, \qquad x+y+z = \frac{3}{2}, \qquad (1-x)(1-y)(1-z) = \frac{1}{64}.$$
Podobně lze postupovat při důkazu (11). Můžete však také využít skutečnost, že reálná čísla $\operatorname{tg}^2 20°$, $\operatorname{tg}^2 40°$ a $\operatorname{tg}^2 80°$ jsou kořeny kubické rovnice $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$.
4. Podobně jako v příkladu 4 využijte vhodný pětiúhelník.
5. K důkazu (12) využijte vzorec
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha+60°) + \operatorname{tg}(\alpha+120°) = 3\operatorname{tg}3\alpha.$$
K důkazu (13) a (14) využijte vzorce
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta),$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta).$$