Pavel Pražák

Ekonomické aplikace nekonečné geometrické řady

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 1, 1–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146228

Ekonomické aplikace nekonečné geometrické řady

Pavel Pražák, FIM UHK, Hradec Králové

1. Úvod

I když je v současných středoškolských učebnicích aplikacím matematiky v ekonomii jistý prostor věnován, srv. [3], [4], [5], student střední školy má mnohem větší možnost seznámit se s použitím matematiky ve fyzice, případně technice. To je důvod, proč bychom rádi v tomto článku upozornili na další zajímavé ekonomické aplikace středoškolské matematiky, se kterými se zájemci o ekonomii dříve či později seznámí.

2. Použité pojmy

V úvahách budeme potřebovat poznatky o geometrických posloupnostech a poznatky o limitách posloupnosti. Některé zde stručně připomeneme (podrobněji viz např. [3]): Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q \neq 1$ a prvním členem a_1 platí vztah

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{1}$$

Dále budeme potřebovat tvrzení, že geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$, je konvergentní a

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0. \tag{2}$$

3. Motivace – multiplikační efekt vládních výdajů

Uvažujme*) tuto praktickou situaci: Vláda uvolnila dodatečných 100 miliónů Kč na obnovu silnic. Firmy, které tuto částku inkasují, rozdělí peníze svým akcionářům a zaměstnancům. Jednotlivci, kteří se stali příjemci peněz, z nich jistou část uspoří, další část použijí na zaplacení

*) Úvahy platí v rámci tzv. neo-keynesiánské makroekonomie, která požaduje splnění jistých předpokladů, např. dostatek nabídky nebo pevné mzdy a ceny. Tyto podrobnější informace však v našem textu nebudeme blíže specifikovat.

daní, je také možné, že určitou část použijí na koupi nemovitostí, ale lze očekávat, že část tohoto důchodu utratí za spotřební zboží a služby. Uvažujme, že na spotřebu je věnováno 60 % ze získaných peněz, tj. 60 milionů Kč. Firmy, které spotřební zboží vyrobily a prodaly, rozdělí tuto částku svým zaměstnancům a akcionářům, takže vznikne další přírůstek důchodů ve výši 60 milionů Kč. Jejich příjemci z nich opět 60 % použijí na spotřebu, takže se vytvoří další důchody ve výši 36 milionů Kč. Takto lze uvažovat dále a vzniká otázka, jaký je celkový přírůstek důchodů, pokud se daný proces odehrává do nekonečna.

Chceme-li odpovědět na položenou otázku, bude třeba nalézt součet všech členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jednotlivých přírůstků:

$$\begin{aligned} a_1 &= 100 \quad \text{milionů Kč} \\ a_2 &= 60 \quad \text{milionů Kč} \\ a_3 &= 36 \quad \text{milionů Kč} \\ &\dots \end{aligned}$$

To je geometrická posloupnost s kvocientem $c = 0{,}6$, který se v ekonomii nazývá *sklon ke spotřebě*. Dosud však umíme sečíst pouze konečný počet čísel, ale daná posloupnost má nekonečný počet členů. Zkusíme vzniklý problém vyřešit tak, že nejdříve sestrojíme posloupnost částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, která bude vyjadřovat kumulovaný účinek uvažovaného jevu:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = 100 && \text{milionů Kč} \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 160 && \text{milionů Kč} \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 196 && \text{milionů Kč} \\ &\dots \end{aligned}$$

Pro n-tý člen této posloupnosti platí

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \\ &= a_1 + a_1c + a_1c^2 + \dots + a_1c^{n-1} = a_1\frac{1-c^n}{1-c}, \end{aligned} \tag{3}$$

kde jsme využili vztah (1) pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti. Zdá se přirozené, že odpovědí na položenou otázku, tj. jaký je celkový kumulovaný účinek popisovaného jevu, by za předpokladu, že posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, měla být hodnota s limity $\lim s_n$ pro $n \to \infty$. Protože $c = 0{,}6 < 1$, můžeme při výpočtu této limity použít výsledku (2) a psát:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1\frac{1-c^n}{1-c} = \frac{a_1}{1-c}. \tag{4}$$

Pro dané hodnoty konkrétně získáme

$$s = \frac{100}{1 - 0{,}6} = 250$$

a provedené úvahy můžeme uzavřít takto: počáteční vládní výdaj ve výši 100 milionů Kč umožnil vytvořit celkem 250 milionů Kč, které navýší domácí produkt. Koeficient

$$\frac{1}{1 - c}$$

se v ekonomii nazývá *jednoduchý multiplikátor vládních výdajů.*

Na základě uvedených úvah lze obecně popsat tento jev: Vládní výdaje zvyšují důchody lidí. Ti tak mohou zvětšit svoji spotřebu. To vyvolá další zvýšení důchodů. Příjemci těchto důchodů mohou také zvětšit svoji spotřebu, což znovu vyvolá zvýšení důchodů. Lze předpokládat, že se popsaný proces stále opakuje, takže přírůstek vládních výdajů přispěje několikanásobně k přírůstku domácího produktu. Tento jev se v ekonomii nazývá *multiplikační efekt vládních výdajů.*

4. Nekonečná geometrická řada.

Připomeňme nyní některé pojmy, které nám pomohou problém studia součtu nekonečně mnoha čísel formulovat přesněji (podrobněji viz [3]): Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5}$$

nazýváme *řadou* příslušnou dané posloupnosti. Je-li navíc posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, konvergentní a má-li konečnou limitu s, říkáme, že řada (5) je *konvergentní, má součet s* a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Je-li posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ divergentní, pak také říkáme, že řada (5) je *divergentní.* Stejným způsobem, jakým jsme získali vztahy (3) a (4), lze dokázat následující obecné tvrzení.

Věta 1. [O konvergenci geometrické řady] *Nekonečná geometrická řada, pro kterou $a_1 \neq 0$, je konvergentní, právě když pro její kvocient q platí $|q| < 1$. V tomto případě je její součet*

$$s = \frac{a_1}{1-q}. \tag{6}$$

5. Současná hodnota

5.1. Současná hodnota budoucích plateb

Připomeňme nejdříve pojmy popisující složené úročení: Dnešní investice X Kč při roční úrokové míře $r \in (0,1)$ a ročním úrokovacím období bude na konci roku představovat hodnotu $V = X(1+r)$ Kč. To je ekvivalentní tvrzení, že částka V Kč vyplacená na konci prvního roku má dnes hodnotu

$$X = \frac{V}{1+r}.$$

Tato hodnota X se nazývá současná hodnota částky V na konci prvního roku. Stejnou úvahu lze provést i pro další období: Dnešní investice Y Kč při roční úrokové míře r a ročním úrokovacím období bude představovat hodnotu $V = Y(1+r)^2$ na konci druhého roku. To znamená, že současná hodnota částky V splatné na konci druhého roku je

$$Y = \frac{V}{(1+r)^2}.$$

Pokud bychom v tomto duchu pokračovali dále, můžeme říci, že *současná hodnota**) PV_t pevně dané částky V, která bude vyplacena na konci t-tého roku od současnosti, bude při roční úrokové míře r a ročním úrokovacím období dána vztahem

$$PV_t = \frac{V}{(1+r)^t}. \tag{7}$$

Posloupnost $(PV_t)_{t=1}^{\infty}$ je geometrická s kvocientem $(1+r)^{-1}$, a protože $(1+r)^{-1} < 1$, je to posloupnost klesající. Jinými slovy současná hodnota částky vyplacené v pozdějším časovém období má dnes menší hodnotu.

*) Anglický název *present value* je důvodem k ustálenému označení PV. Tuto dvojici písmen je v této souvislosti třeba chápat jako jeden nedělitelný symbol. I když lze proti takovému způsobu označení vznést námitky, v ekonomii není ojedinělé.

To je samozřejmé, neboť čím později v budoucnosti obdržíme pevnou částku V, tím méně je dnes třeba investovat, abychom v této vzdálenější budoucnosti danou částku obdrželi. To je důvod, proč ekonomové hovoří o zmenšených – *diskontovaných* budoucích příjmech a hodnota $(1+r)^{-1}$ se nazývá *diskontní míra.* Podle vztahu (2) je

$$\lim_{t\to\infty} PV_t = 0,$$

což lze interpretovat tak, že současná hodnota libovolné pevné částky (ať je jakkoliv vysoká), která bude vyplacena v nekonečně vzdáleném roce, je nulová.

5.2. Současná hodnota věčného důchodu

Důchod je posloupnost plateb, které jsou v průběhu určitého období periodicky vypláceny příjemci. Délka časové periody výplat je přitom konstantní. Je-li důchod vyplácen neomezenou dobu pomocí stejných částek, mluvíme o *věčném důchodu,* neboli *perpetuitě*. Příkladem takových plateb jsou např. nadace s každoročně opakovanou výplatou nadační ceny.

Označme K hodnotu konstantní platby v každé časové periodě. Připomeňme dále příklad 5.1, kde jsme odvodili vztah (7) pro současnou hodnotu obnosu K vyplaceného na konci t-té časové periody. Současná hodnota věčného důchodu je

$$PV = K\frac{1}{1+r} + K\frac{1}{(1+r)^2} + \cdots,$$

kde $r \in (0,1)$ je úroková míra. To je geometrická řada s prvním členem $a_1 = K\cdot(1+r)^{-1}$ a kvocientem $q = (1+r)^{-1} < 1$. Podle věty 1 můžeme tuto řadu sečíst a použijeme-li (6), získáme

$$PV = K\frac{1}{1+r}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+r}} = \frac{K}{r}.$$

6. Tvorba peněz v bankách

Domácnosti i firmy si své peníze ukládají do bank. Ty mají od centrální banky předepsánu povinnou minimální míru rezerv.*) V našich

*) Česká národní banka požaduje 2 %, viz `www.cnb.cz`.

početních úvahách budeme pro jednoduchost předpokládat např. hodnotu 10 %. To znamená, že ze všech vkladů musí mít banky k dispozici ve formě hotovosti rezervu 10 %; tato hotovost je většinou uložena u centrální banky. Zbytek mohou volně půjčovat a z těchto půjček získávat úroky. Banky půjčené peníze ze žádného účtu svých klientů neodepisují, a tak vždy, když banka někomu půjčí peníze, vznikají nové peníze. Podrobný popis tohoto procesu lze nalézt např. v [2] nebo v [1], zde uvedeme velmi zjednodušené úvahy: Půjčí-li banka svému klientovi peníze, klient je utratí a subjekt, který od nich peníze dostal jako tržbu, si je uloží opět u banky. Tyto nové peníze nová banka opět půjčí dál, resp. pouze část z nich, např. 90 %, pokud centrální banka požaduje 10 % povinných rezerv.

Uveďme raději konkrétní příklad: Pokud do banky vložíme částku $a_1 = 1\,000$ Kč, banka si 100 Kč uloží jako povinnou rezervu a zbytek, tj. 900 Kč, se snaží někomu půjčit, aby mohla pobírat z půjčky úrok. Klient, který si půjčí těchto 900 Kč, je utratí, a subjekt, který tuto částku obdrží, ji vloží do další banky. Další banka tedy přijme vklad $a_2 = 900$ Kč, povinně uloží 90 Kč a půjčí 810 Kč. Další banka přijme od nějakého klienta $a_3 = 810$ Kč, povinně uloží 81 Kč a půjčí 729 Kč. Proces takto pokračuje a vznikají další a další peníze na účtech bank. Otázkou je, kolik peněz se touto formou může vytvořit. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s prvním členem $a_1 = 1\,000$ a kvocientem $q = 0{,}9$. Otázku lze tedy formulovat tak, jaký je součet geometrické řady $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Podle vztahu (6) to je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1\,000}{1-0{,}9} = 10\,000,$$

takže popsaným procesem může vzniknout 10 000 Kč. Koeficient $(1-q)^{-1}$ nazývají ekonomové jednoduchým *peněžním multiplikátorem* a zjednodušeně popsanému prosesu se říká *multiplikovaná expanze depozit.*

Je dobré poznamenat, že přesné množství nových peněz, které uvedeným způsobem z určitého vkladu vzniknou, závisí vedle míry povinných rezerv také na řadě dalších faktorů, např. zda dokáže banka všechny peníze, které může půjčit, skutečně někomu poskytnout jako úvěr, nebo na tom, kolik peněz se do bank vrátí jako vklady a kolik z nich se stane oběživem. Vzniká tedy otázka, jaká je účinnost multiplikačního efektu a otvírá se cesta k podrobnějšímu studiu, viz např. [2] nebo [1].

7. Závěr

Ve středoškolských učebnicích matematiky jsou většinou uvedeny geometrické úlohy, které vedou na použití geometrické řady, viz také [6]. V článku jsme na problému multiplikačního efektu vládních výdajů, problému věčného důchodu nebo na problému tvorby peněz v bankách ukázali použití nekonečné geometrické řady v ekonomii. Důraz jsme kladli na použití matematických pojmů a získané výsledky jsme z pohledu ekonomie interpretovali až následně.

Literatura

[1] Fuchs, K., Tuleja, P.: *Základy ekonomie.* Ekopress, Praha, 2003.
[2] Holman, R.: *Makroekonomie, středně pokročilý kurz.* Nakl. C. H. Beck, Praha, 2004.
[3] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia, Posloupnosti a řady.* Prometheus, Praha, 1995.
[4] Odvárko, O.: *Posloupnosti a finanční matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť.* Prometheus, Praha, 2002.
[5] Odvárko, O.: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy.* Prometheus, Praha, 2005.
[6] Trojovský, P.: O některých geometrických úlohách vedoucích na geometrickou řadu. *MFI* **5** (2006), 257–267.

O důkazech zajímavých číselných rovností

Jaroslav Švrček, PřF UP Olomouc

Cílem článku je podrobněji seznámit čtenáře s nejpoužívanějšími metodami důkazů výjimečných číselných rovností, které jsou splněny pro speciální (zpravidla iracionální) hodnoty goniometrických funkcí. Takové identity můžeme na sebevýkonnějším počítači pouze otestovat s omezenou přesností. Poznatky získané v tomto článku lze úspěšně využít při hledání nebo dokazování jiných číselných identit uvedeného typu.

Nejpřirozenější cestou, jak dokázat takovou číselnou identitu, je *využití základních goniometrických vzorců* (goniometrických identit). Jedná se především o aplikace součtových formulí (pro dva argumenty) a dále využití jejich důsledků, kterými jsou formule pro dvojnásobný, resp. trojnásobný argument. Uplatníme je při řešení úvodní úlohy.