Rozhledy matematicko-fyzikální

Pavel Šišma

Leonhard Euler

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 4, 21–32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146218

Leonhard Euler

Pavel Šišma, ÚMS PřF MU Brno

V tomto roce si připomínáme třísté výročí narození nejvýznamnějšího matematika 18. století a jednoho z nejtvořivějších učenců lidské historie Leonharda Eulera. S jeho jménem, výsledky a symbolikou, kterou používal ve svých pracích, se setkáváme dodnes i ve školské matematice. Eulerova přímka, Eulerova metoda, Eulerovo číslo, Eulerova konstanta, mnoho Eulerových vět, vzorců a rovnic z různých oblastí matematiky tvoří jen malou část z více než 80 matematických pojmů nesoucích Eulerovo jméno, které čtenář nalezne na stránkách `mathworld.wolfram.com` – jedné z nejrozsáhlejších encyklopedií matematických pojmů na Internetu.

O Leonhardu Eulerovi, o jeho životě a díle, byly již popsány tisíce stran různých článků a speciálních monografií. V našem článku můžeme jen krátce popsat Eulerovy životní osudy, velmi stručně pohovoříme o jeho vědeckém díle a v poslední části ukážeme, jakým způsobem Euler nevědomky přispěl ke vzniku moderní matematické disciplíny – teorie grafů.

Život Leonharda Eulera

Leonhard Euler se narodil 15. dubna 1707 ve švýcarské Basileji v rodině pastora Paula Eulera. Již v útlém dětství se mu dostalo kvalitního matematického vzdělání od otce, který byl na univerzitě v Basileji žákem Jakoba Bernoulliho (1654–1705).[1)] Jakob Bernoulli a jeho mladší bratr Johann (1667 až 1748) patřili k těm matematikům, kteří se jako první seznámili s matematickými pracemi I. Newtona (1643–1727) a G. W. Leibnize (1646–1716) a kteří stáli na přelomu 17. a 18. století u zrodu diferenciálního a integrálního počtu.

1) O všech matematicích, jejichž jména v naší práci uvádíme, nalezne čtenář snadno podrobné informace na `www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history`.

Přáním Paula Eulera bylo, aby se i jeho syn stal duchovním, a proto ho v roce 1720 vyslal na basilejskou univerzitu, kde měl nejprve získat širší vzdělání, které by ho připravilo k hlubšímu studiu teologie. Johann Bernoulli, který se po smrti bratra stal profesorem matematiky na univerzitě, dobře poznal obrovský talent svého nového žáka a doporučil mu k samostatnému studiu práce tehdejších nejvýznamnějších matematiků. Pod jeho vedením za tři roky Euler ukončil magisterské studium filozofie a začal studovat teologii, řečtinu a hebrejštinu. Brzy však tohoto studia zanechal a se souhlasem otce se věnoval dále jen studiu matematiky. Ve svých devatenácti letech publikoval Euler svoji první práci a se studií o stavbě lodí usiloval v roce 1727 o Velkou cenu pařížské akademie. Jeho práce se umístila na třetím místě, což svědčilo o jeho mimořádných kvalitách a schopnosti vědecké práce (později zaslal ještě dalších 14 prací do této soutěže a zvítězil v letech 1738 a 1740). Eulerovi se však pro jeho mládí nepodařilo získat místo profesora fyziky na basilejské univerzitě, když nebyl zařazen do losování, kterým byl z vhodných kandidátů vybrán nový profesor.

Bylo to možná štěstí, neboť tento neúspěch brzy přivedl Eulera k rozhodnutí odejít do jednoho z nejvýznamnějších středisek evropské vědy. Univerzity nebyly v 18. století institucemi, které by věnovaly pozornost vědecké práci. Byly tu sice výjimky v podobě dvou nejvýznamnějších anglických univerzit, ale v Basileji by byli Euler s Johannem Bernoullim víceméně osamoceni. Přátelství se dvěma syny Johanna Bernoulliho, Mikulášem (1695–1726) a Danielem (1700–1782), přivedlo Eulera do Petrohradu, kde byla v prosinci roku 1725 slavnostně otevřena petrohradská akademie věd. Na této akademii získali Mikuláš a Daniel místa profesorů, a když po osmi měsících Mikuláš zemřel, zajistil Daniel Eulerovi pozvání do Petrohradu, které Euler přijal. Po téměř šesti týdnech cesty dorazil Euler 17. května 1727 do města, ve kterém prožil ve dvou obdobích více než 30 let svého života. Do Basileje se již nikdy nevrátil.

Euler byl do Petrohradu původně povolán na místo učitele fyziologie, ale již po příjezdu se mohl věnovat pouze matematickým vědám. V roce 1730 byl jmenován profesorem fyziky a o tři roky později, poté, co se Daniel Bernoulli vrátil zpět do Basileje, profesorem matematiky. Euler se s ostatními akademiky podílel na mnoha projektech, ve kterých bylo třeba uplatnit matematické metody. Šlo například o sestavování map, řadu technických expertíz, řešení problémů stavby lodí a navigace, ale také psaní učebnic. 30. léta 18. století jsou prvním obdobím Eulerovy usilovné práce, obdobím, kdy se v roce 1734 oženil s Catherine Gsellovou, se kterou měl třináct dětí. Z nich se ale jen pět dožilo dospělosti. (Po smrti své ženy se v roce 1776 oženil podruhé.) 30. léta jsou ale také obdobím, kdy po usilovné práci na mapách Ruska Euler oslepl na pravé oko.

Nejasná politická situace koncem 30. let a postavení petrohradské akademie přimělo Eulera, aby přijal nabídku pruského krále Friedricha II. na místo člena berlínské akademie. V Berlíně Euler působil 25 let v období 1741–1766. Přesto i nadále udržoval kontakt s Petrohradem, kde zůstal čestným členem akademie a publikoval stále v jejím časopise, za což dostával do Berlína část svého původního platu. Zhruba polovina jeho prací vycházela v časopise berlínské akademie, ale zmíněné časopisy nestačily tempu jeho práce. V době berlínského působení napsal Euler asi 380 článků a několik knih věnovaných jak čisté, tak aplikované matematice. Kromě toho se podílel na řadě projektů obou akademií a redigoval oba časopisy. Když po smrti prezidenta akademie P. Maupertia (1698–1759) Friedrich II. nenabídl uvolněné místo Eulerovi a místo toho pozval v roce 1763 do Berlína J. d'Alemberta (1717–1783), Euler Berlín opustil a vrátil se roku 1766 navždy do Petrohradu.

Brzy po návratu do Petrohradu Euler oslepl i na levé oko a nic na tom nezměnila ani operace v roce 1771, která mu vrátila zrak jen na několik dní. Třebaže byl nyní zcela odkázán při psaní na pomoc druhých (svých synů i dalších členů akademie), napsal Euler při svém druhém petrohradském pobytu přibližně polovinu všech svých prací.[2)]

Leonhard Euler zemřel v Petrohradě 18. září 1783 ve věku 76 let, příznačně během rozhovoru o matematických problémech. Jak konstatoval v nekrologu předneseném členům pařížské akademie M. J. Condorcet (1743–1794), Euler „přestal počítat a žít."

Dílo Leonharda Eulera

Leonhard Euler je autorem 866 prací, z nichž za jeho života vyšlo více než 500. Euler počítal lehce, tak „jako člověk dýchá nebo orel létá" (François Arago), a jak sám říkával, mnoho svých významných děl vytvořil, když měl v náručí nemluvně a u jeho nohou si hrály ostatní děti. Přitom v Eulerově případě šlo o díla rozsáhlá, takže ročně v průměru napsal kolem 800 stran. Žádný matematik historie, současnosti a pravděpo-

---

[2)] Po jeho smrti přibližně dalších 50 let petrohradská akademie publikovala jeho dosud nevydané práce.

dobně i budoucnosti se nemůže v tomto ohledu s Eulerem měřit.[3] Kromě toho Euler vedl velmi rozsáhlou vědeckou korespondenci, která obsahuje mnoho matematických výsledků a některé dopisy by bylo možno jistě považovat za kratší matematické práce. Díky této korespondenci znali matematici Eulerovy výsledky dříve, než vyšly tiskem, neboť mnoho myšlenek a výsledků Euler publikoval řadu let po jejich objevení a mnohé práce vyšly po jeho smrti.

Zatímco u většiny matematiků počet prací s věkem klesá, u Eulera byla situace skoro obrácená. Vždyť v letech 1775–76, kdy měl již téměř 70 let, napsal minimálně 120 prací a během posledních deseti let svého života vytvořil přes třetinu svých prací. Jistě, nebyly to již mnohasetstránkové monografie berlínského období, ale i tak je Eulerova produktivita práce v pozdním věku neuvěřitelná.

Euler přispěl svými výsledky ke všem odvětvím matematiky, která existovala v jeho době. Jeho práce je možno rozdělit do následujících oblastí: matematika, fyzika, astronomie, mechanika a populární práce (učebnice nižších škol či známé *Dopisy německé princezně* z let 1768 až 1772). Matematické práce jsou věnovány teorii čísel, teorii algebraických rovnic, kombinatorice a pravděpodobnosti, diferenciálnímu a integrálnímu počtu, nekonečným řadám, eliptickým integrálům, diferenciálním rovnicím, variačnímu počtu a geometrii. Nespočet důležitých matematických výsledků ovšem obsahují i jeho práce aplikační. Euler se zabýval mimo jiné akustikou a optikou, mechanikou pevných i pružných těles, hydromechanikou, teorií strojů a stavbou lodí.

Fundamentálním dílem z prvního petrohradského období je jeho dvousvazková *Mechanika* vydaná v roce 1736 (první svazek Euler dokončil v roce 1734, kdy mu bylo pouhých 27 let), která představovala ohromný pokrok v tom, že její výklad byl na rozdíl od Newtona založen systematicky na infinitezimálním počtu a ne na syntetických geometrických důkazech. V jiné rozsáhlé učebnici z roku 1765 Euler studoval mechaniku pevných těles. V astronomii zkoumal pohyby vesmírných těles. V roce 1744 vyšla jeho kniha *Teorie pohybu planet a komet*, poté Euler věnoval velkou pozornost pohybu Měsíce. K tomuto tématu vydal dvě monografie v letech 1753 a 1772. Teoreticky tak pomohl řešit v té době mimořádně obtížný problém určování zeměpisné délky.

---

[3] Více než 900 prací s rozsahem ovšem podstatně menším publikoval Arthur Cayley (1821–1895). Pod více než 1500 pracemi je podepsán legendární maďarský matematik Pál Erdős (1913–1996), který ovšem publikoval se spoluautory a mnohdy k práci přispěl jen několika myšlenkami.

Euler se zabýval rovněž geofyzikou nebo kartografií. Jen obtížně bychom hledali oblasti exaktních věd, kterým by nevěnoval alespoň malou pozornost. Vždyť v době, kdy se připravoval převzít místo učitele fyziologie v Petrohradě, zabýval se i přírodními vědami a medicínou.

Není možno zdaleka popsat ani všechny nejdůležitější Eulerovy matematické výsledky. Většinu svých prací publikoval latinsky a přes 800 z nich je dostupných zájemcům na Internetu na stránkách *Euler Archiv* (`www.math.dartmouth.edu/~euler`). Jeho způsob matematického zápisu byl (na rozdíl od matematických prací 16. a 17. století) již v mnohém velmi podobný našemu. Za řadu symbolů a pojmů, které dnes běžně používáme ve školních učebnicích, vděčíme Eulerovi. Euler řadu označení či termínů sám navrhl nebo se staly běžnými zásluhou jeho učebnic. Kolem roku 1727 poprvé použil označení e pro základ přirozených logaritmů, díky Eulerovi se definitivně prosadilo použití řeckého písmena π pro poměr mezi obvodem a průměrem kruhu. Euler jako první užil symbol i pro $\sqrt{-1}$ (1777). Všechny tyto symboly nacházíme ve slavném vztahu

$$\mathrm{e}^{\pi i} + 1 = 0$$

obsahujícím pět nejdůležitějších matematických konstant. Nejde však jen o označení významných konstant, ale také třeba za symboly $f(x)$ (1734) nebo $\sum$ (1755) vděčíme Eulerovi.

Jak již víme, byl Euler žákem Johanna Bernoulliho, jednoho z první generace tvůrců infinitezimálního počtu objeveného Newtonem a Leibnizem. Byla to Eulerova díla *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755) a *Institutiones calculi integralis* (1768–1770), která se stala základními učebnicemi a podnítila její další rozvoj ve druhé polovině 18. století. Euler jako první budoval infinitezimální počet na základě pojmu funkce a ne na pojmu křivka. Podle Eulera „funkce proměnné veličiny je analytický výraz, který lze nějakým způsobem sestavit z proměnné veličiny, čísel a konstantních veličin“. Funkce studoval pomocí nekonečných řad a součinů. Třebaže při tom důsledně nezkoumal konvergenci těchto limitních procesů a dopustil se některých chyb a nesprávných závěrů, většinu jeho výsledků používáme dodnes. Vztah

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

který nacházíme v *Introductiu*, umožnil Eulerovi studovat i funkce v komplexním oboru a využívat je například v kartografii. *Introductio* ovšem obsahuje i pasáže věnované řešení rovnic, trigonometrii a jeho druhá část je věnována problémům analytické geometrie. Eulerova učebnice nebyla první, která se analytickou geometrií zabývala, nicméně Eulerovo pojetí bylo nové a v mnohém se stalo vzorem pozdějším učebnicím analytické geometrie.

Eulerovy učebnice diferenciálního a zejména integrálního počtu rovněž velmi výrazně překonávaly vše, co bylo dosud o infinitezimálním počtu napsáno. Leckterého dnešního studenta základů integrálního počtu by jistě překvapilo, že již Euler v případě neurčitých integrálů znal všechny metody a výsledky, které jsou dnes přednášeny v prvním ročníku vysoké školy. Podobně je tomu v případě úvodních kurzů diferenciálních rovnic, které jsou rovněž obsaženy v Eulerově „Integrálním počtu“. Eulerovu klasifikaci rovnic na lineární, exaktní nebo homogenní užíváme dodnes.

Neméně významnou oblastí Eulerova zájmu byla teorie čísel. Euler jako první dokázal mnoho výsledků, které bez důkazu (tedy pouze jako hypotézy) zformulovali jeho předchůdci, zejména Pierre de Fermat (1601–1665). Fermat formuloval řadu hypotéz a tvrzení, která ovšem nedokázal. Své výsledky z teorie čísel Euler publikoval přibližně ve stovce prací. Aplikoval v nich nejen do té doby klasické důkazové prostředky, ale současně využil řady metod aritmetiky, algebry a matematické analýzy.

Z jeho výsledků v teorii čísel můžeme zmínit důkaz, že Fermatova hypotéza, podle které jsou všechna čísla tvaru $2^{2^n}+1$ $(n=1,2,3,\ldots)$ prvočísla, není pravdivá. Euler v roce 1732 zjistil a ve své první práci věnované teorii čísel (1738) ukázal, že číslo $2^{2^5}+1 = 4\,294\,967\,297$ je dělitelné číslem 641. O několik let později Euler naopak potvrdil jiné Fermatovo tvrzení, že každé prvočíslo tvaru $4n+1$ je možno rozložit na součet dvou druhých mocnin přirozených čísel, a to právě jedním způsobem. Euler se rovněž zabýval dnes jistě nejznámějším Fermatovým tvrzením, že neexistují celá kladná čísla x, y a z a přirozené číslo $n>2$, pro která je splněna rovnost $x^n+y^n=z^n$. Euler dokázal toto tvrzení nejprve pro $n=4$ a později pro obtížnější případ $n=3$.

Velkou slávu Eulerovi v období prvního petrohradského pobytu přineslo řešení problému, který je někdy nazýván „basilejský“, protože o jeho řešení se neúspěšně pokoušeli bratři Bernoulliové i Johannův syn Daniel. Šlo o určení součtu konvergentní řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Euler v roce 1735 ukázal, že součet této řady je roven $\frac{\pi^2}{6}$. O dva roky později ukázal pozoruhodnou souvislost tohoto problému s teorií čísel, když dokázal, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{(1-\frac{1}{p^s})},$$

kde v součinu na pravé straně p postupně probíhá všechna prvočísla.

Nakonec uveďme ještě dva známé výsledky, kterých Euler dosáhl v elementární matematice. V roce 1765 analytickými prostředky odvodil tvrzení, že v každém nerovnostranném trojúhelníku leží průsečík výšek V, těžiště T a střed kružnice trojúhelníku opsané O na jedné přímce a těžiště dělí spojnici průsečíku výšek a středu kružnice opsané v poměru 2 : 1. Přímka, na které uvedené body leží, dnes nese Eulerovo jméno. Podobně je tomu v případě známé věty určující vztah mezi počtem vrcholů V, hran H a stěn S konvexních mnohostěnů, jejíž význam v dnešní době výrazně přesahuje rámec elementární geometrie. Euler v roce 1750 dokázal, že pro konvexní mnohostěny platí vztah $V+S=H+2$. V tomto případě se ovšem jedná o jeden z častých případů, kdy matematická věta nenese jméno svého objevitele. Vztah totiž znal kolem roku 1620 R. Descartes (1596–1650), ale nikdy ho v této podobě nepublikoval.

Eulerovo dílo vždy bylo zdrojem obdivu pro každého, kdo se ho pokusil studovat. Velcí matematici 18. a 19. století zdůrazňovali význam studia Eulerových prací. P. S. Laplace (1749–1827) říkal mladým matematikům: „Čtěte Eulera, je učitelem nás všech.“ C. Gauss (1777–1855) pak o jeho díle prohlásil: „Studium Eulerova díla zůstane nejlepší školou pro nejrůznější oblasti matematiky a nemůže je nic nahradit.“

Spíše už jen pro doplnění uveďme i Eulerův zájem o bádání na poli fyziky, neboť často od ní se dostal právě k matematice. Vybudoval např. mechaniku tuhého tělesa, přispěl k mechanice pružného tělesa a upřesnil důležité otázky balistiky v odporujícím prostředí.

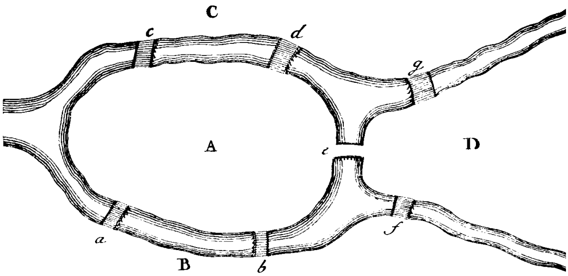
Problém königsberských mostů

Ve městě Königsbergu v někdejším Východním Prusku (dnešní Kaliningrad v Rusku) jsou v centru města na řece Pregel (Pregolja) dva ostrovy, které v 18. století spojovalo s oběma břehy sedm mostů. Problém königsberských mostů[4] spočíval v nalezení cesty, která by spojo-

[4] Městu Königsberg se v minulosti v českých zemích říkalo Královec (u zrodu města stál český král Přemysl Otakar II.), a v české literatuře proto často nacházíme název *problém mostů města Královce.*

vala všechny části města, začínala a končila ve stejné části a při které by každý most byl použit právě jednou.

Tento problém se objevil již v 17. století a není úplně jasné, jakým způsobem se s ním Euler seznámil. Zdá se, že se na něj s tímto problémem obrátil jeho přítel Carl Ehler, v té době starosta města Danzig (dnešní Gdaňsk). Řešení problému mostů předložil Euler 26. srpna 1735 na zasedání petrohradské akademie a informoval o něm podrobně v dubnu následujícího roku Ehlera. Euler v dopise, který se dochoval do dnešních dní, napsal, že tento úkol nemá mnoho společného s matematikou, ale že bude rád, když dostane nějaké podobné. Euler se podivil nad tím, že se lidé domnívají, že právě matematik by měl tento úkol vyřešit.



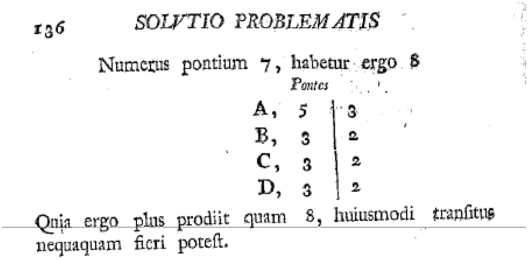
Obr. 1: Problém königsberských mostů

Třebaže Euler nepovažoval problém za matematický, rozhodl se svoje řešení publikovat v časopisu petrohradské akademie pro rok 1736. Článek *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ovšem vyšel až v roce 1741. Za pozornost jistě stojí, že o Eulerově práci se zmiňuje v 15. díle francouzské encyklopedie Eulerův rival d'Alembert. Je tedy zřejmé, že problém königsberských mostů byl ve své době opravdu populární a Eulerovo řešení známé. V roce 1851 byla Eulerova práce poprvé přeložena do francouzštiny É. Coupym, který Eulerův postup ilustroval na řešení problémů mostů přes řeku Seinu v Paříži. Druhý francouzský překlad připravil v roce 1883 É. Lucas.

Problém je populární dodnes a setkáváme se s ním jak v řadě publikací věnovaných rekreační matematice, kam by ho Euler sám zcela jistě zařadil, tak v knihách věnovaných teorii grafů. Eulerova práce je totiž mnoha autory považována za první práci této moderní matematické disciplíny, jejíž skutečný zrod datujeme až do první poloviny 20. století.

Jak již název práce *Řešení problému týkajícího se geometrie polohy* napovídá, Euler přece jen viděl souvislost problému s geometrií. Ovšem geometrií zcela odlišnou od té, která byla studována do té doby (pomineme skutečnost, že geometrií byla tehdy nazývána celá matematika). V úvodu práce rozdělené na 21 číslovaných odstavců napsal: *Vedle té části geometrie, která se zabývá velikostmi a které byla vždy věnována největší pozornost, existuje ještě další část, dříve téměř neznámá, o které se první zmínil Leibniz a nazval ji* geometrie polohy. *Tato část se zabývá pouze určením polohy a jejími vlastnostmi; neobsahuje žádné veličiny, ani počítání s nimi.*

Euler označil čtyři části města Königsbergu velkými písmeny A, B, C a D a mosty malými písmeny a, b, c, d, e, f a g (obr. 1). Převedl problém přecházení mostů na nalezení posloupnosti 8 písmen (A, B, C a D) takové, že neuspořádané dvojice AB, AC se v ní objeví dvakrát, zatímco dvojice AD, BD a CD právě jednou. Písmena představují jednotlivé části města a dvojicím odpovídají mosty přes řeku Pregel. Euler ukázal, že taková posloupnost nemůže existovat, a proto neexistuje ani řešení problému königsberských mostů. Eulerův důkaz je jednoduchý: *Protože existuje 5 mostů, které končí v části A, pak posloupnost písmen musí obsahovat písmeno A třikrát. Podobně 3 mosty vedoucí do částí B, C a D znamenají, že tato písmena budou v posloupnosti dvakrát. To ovšem není možné, protože posloupnost má jen 8 písmen* (obr. 2).


136 SOLVTIO PROBLEMATIS

Numerus pontium 7, habetur ergo 8

	Pontes	
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

Quia ergo plus prodiit quam 8, huiusmodi tranſitus nequaquam fieri poteſt.

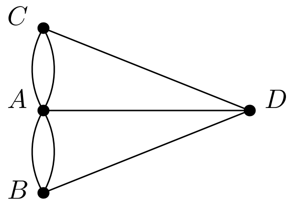
Obr. 2: Ukázka z Eulerovy práce

V další části práce Euler vyřešil podobným způsobem problém obecně. Jak sám uvedl, bylo by vždy v podobných jednoduchých situacích možné úkol vyřešit tak, že vyšetříme všechny možné cesty. Pro komplikovanější případy by ovšem tato možnost byla obtížně proveditelná.

Pro snazší vyjadřování si na tomto místě převedeme úlohu do dnešního jazyka teorie grafů.[5] Problém spočívá v nalezení eulerovského tahu

[5] Graf $G = (U, H)$ je tvořen množinou uzlů U, které znázorňujeme jako kroužky, a množinou hran H, které znázorňujeme jako čáry spojující dvojice uzlů. Stupněm uzlu pak rozumíme počet hran, které z uzlu vycházejí.

v grafu,[6] jehož uzly představují jednotlivé části města Königsbergu a hrany odpovídají sedmi mostům přes řeku Pregel. Ve většině dnešních základních učebnic teorie grafů tento graf nalezneme (obr. 3). Někdy i s chybnou poznámkou, že takto situaci graficky zachytil již Euler. Ve skutečnosti se souvislost mezi problémem königsberských mostů a tímto grafem objevila až ve velmi známé knize W. W. Rouse Balla (1850–1925) věnované rekreačním matematickým problémům.



Obr. 3: Graf k problému königsberských mostů

První věta teorie grafů, která byla v Eulerově práci dokázána, zní v dnešní terminologii takto: *Nechť* $G = (U, H)$ *je konečný graf,* $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ *je množina jeho uzlů a nechť množina jeho hran* H *má* h *prvků. Stupeň uzlu* u_i $(i = 1, \dots, n)$ *označme* $\mathrm{st}(u_i)$. *Pak platí*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{st}(u_i) = 2h.$$

Své další úvahy shrnul Euler do následujících pravidel (jsou opět vyjádřena dnešním jazykem), která umožňují v podobných problémech rozhodnout, zda v souvislém grafu hledaný tah existuje:[7]

1. *Jsou-li v grafu více než dva uzly lichého stupně, pak eulerovský tah neexistuje.*
2. *Jsou-li v grafu právě dva uzly lichého stupně, pak existuje otevřený eulerovský tah začínající v jednom z těchto uzlů a končící v druhém.*
3. *Jestliže jsou v grafu všechny uzly sudého stupně, pak existuje uzavřený eulerovský tah.*

---

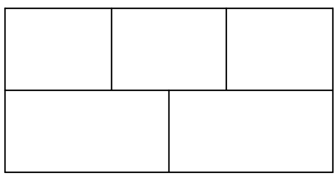
[6] Sled v grafu je posloupnost uzlů a hran $u_0 h_1 u_1 h_2 \dots h_n u_n$, kde hrana h_i spojuje uzly u_{i-1}, u_i. Tahem v grafu pak rozumíme sled, ve kterém se neopakují hrany. Všechny tahy rozdělujeme na uzavřené a otevřené podle toho, zda začínají a končí ve stejném uzlu, nebo ne. Eulerovský tah je takový tah, který obsahuje všechny hrany grafu.

[7] Souvislým grafem rozumíme graf, ve kterém pro libovolnou dvojici uzlů existuje sled začínající v jednom a končící ve druhém uzlu.

Euler dobře věděl, že jakýkoliv graf může obsahovat jen sudý počet uzlů lichého stupně. Souvislý graf, který obsahuje pouze uzly sudého stupně, dnes nazýváme eulerovský graf.

Euler dokázal jen první dvě pravidla, třebaže mu byl později často důkaz třetího tvrzení připisován. Zdá se, že Euler považoval tento důkaz za zcela elementární, jak plyne z posledního odstavce jeho práce. Zde ukázal způsob, jakým nalezneme eulerovský tah v případě, kdy existuje. Důkaz třetího Eulerova pravidla podal těsně před svou smrtí mladý německý matematik C. Hierholzer (1840–1871). Nejprve ukázal, že pokud graf obsahuje eulerovský tah, pak při každém průchodu libovolným uzlem využíváme dvě různé hrany, které z něj vycházejí. Všechny uzly grafu tedy mají sudý stupeň. Bylo třeba dokázat ještě obrácené tvrzení. Hierholzerův důkaz spočívá v odvození následujícího algoritmu, který umožňuje najít eulerovský tah v eulerovském grafu: *Najdeme libovolný tah, který začíná a končí ve stejném uzlu, a odstraníme hrany, které jsme tímto tahem prošli. Pak zbývající graf obsahuje buď pouze izolované uzly (v tom případě jsme již našli eulerovský tah), nebo existují uzly, kterými jsme již prošli a které mají i nyní sudý stupeň. Vyberme některý z nich a vytvořme libovolný uzavřený tah, který v daném uzlu začíná a končí. Vložíme-li jej do původního tahu, tento zvětšíme a tímto způsobem můžeme pokračovat tak dlouho, dokud nenalezneme výsledný eulerovský tah.*

Hierholzer s velkou pravděpodobností Eulerovu práci neznal. Problém mostů nezmínil a zabýval se ekvivalentním problémem, který všichni dobře známe — „nakreslit obrázek jedním tahem". Hierholzer v této souvislosti citoval práci z roku 1847, ve které se autor J. B. Listing (1808–1882) mimo jiné zabýval i úkolem nakreslit obrázky složené z uzlů a čar jedním tahem. Listing zjistil (ale nedokázal), že pokud obrázek obsahuje $2p$ ($p > 0$) uzlů lichého stupně, pak k jeho nakreslení je zapotřebí minimálně p otevřených tahů. V konkrétním případě vyslovil toto tvrzení již Thomas Clausen (1801–1885), když v roce 1844 ukázal, že obr. 4 nelze nakreslit méně jak 4 souvislými tahy.



Obr. 4: Clausenův graf

Zajímavá interpretace problému se objevila v roce 1849 v práci, ve které O. Terquem (1782–1862) úlohu vyjádřil v termínech hry domino. Úkolem je položit kostky domina tak, aby vytvořily uzavřenou „křivku“. Číslům 0 až 6 přiřadil uzly a jednotlivým kostkám hrany tohoto grafu. Existence kostek se dvěma stejnými čísly, kterým odpovídají smyčky grafu,[8)] na problému nic nemění. Graf má všechny uzly stupně osm, je tedy eulerovský a úloha má řešení.

Problém königsberských mostů se stal součástí většiny knih rekreační matematiky, ale také teorie grafů. Uveďme, že když byl v roce 1875 v Königsbergu postaven další most (spojující části B a C), tak L. Saalschütz upozornil na to, že úloha má už 48 řešení začínajících v části A a končících v části D.

L i t e r a t u r a

[1] Juškevič, A. P. a kol.: *Matematika v 18. století. Historie matematiky, sv. 3.* Moskva, 1972 (v ruštině).

[2] Šišma, P.: *Teorie grafů 1736–1963.* Praha, 1997.

Listy z kalendára

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave

János Bolyai — (15. 12. 1802 – 27. 1. 1860)

Po úspešnom štúdiu na gymnáziu nešiel pre nedostatok prostriedkov študovať na univerzitu. Absolvoval vojenskú inžiniersku akadémiu vo Viedni (1818–1823). Viac ako päť rokov spracúval výsledky svojich geometrických predstáv. Už pred rokom 1823 zanechal pokusy o dôkaz piatej Euklidovej axiómy, uvedomil si jej nezávislosť a začal budovať geometriu bez nej. V roku 1832 vyšla kniha jeho otca Farkaša s 23 stránkovým Jánosovým dodatkom, vykladajúcim absolútne pravdivú vedu o priestore. Svet

[8)] Smyčkou rozumíme hranu, která vychází i končí ve stejném uzlu, takže se do stupně uzlu započítává dvakrát.