Rozhledy matematicko-fyzikální

Miroslav Macháček

Shodná zobrazení v Lobačevského rovině

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 4, 1–9

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146213`

Shodná zobrazení v Lobačevského rovině

Miroslav Macháček, MFF UK Praha

1. Úvod

Od 19. století zkoumají matematikové i jiné možné (tj. logicky bezesporné) geometrické světy, ve kterých body a přímky mají trochu jiné vlastnosti, než na jaké jsme zvyklí. Ze všech takových úvah se zde zaměříme na jednu problematiku, a sice na problematiku shodných zobrazení.

Abychom mohli číst tento článek s porozuměním, musíme znát základní konstrukce vzoru a obrazu v zobrazení nazývaném *kruhová inverze*. Je též třeba znát pojem *kolmost kružnic*, který neznamená nic jiného, než že jsou kolmé tečny k těmto kružnicím ve společném bodě. V následujícím modelu se totiž používají modely přímek, což jsou oblouky kružnic, které jsou kolmé ke kružnici omezující model roviny (význam této věty poznáte plně asi až po přečtení několika dalších odstavců).

2. Shodné zobrazení

Shodná zobrazení v tradiční eukleidovské rovině známe z hodin matematiky na základní a střední škole. Zopakujme si nejprve definici shodného zobrazení.

Definice 2.1. Zobrazení v rovině nazýváme *shodným zobrazením*, právě když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' v tomto zobrazení platí $|XY| = |X'Y'|$.

Konkrétně pak shodná zobrazení dělíme na tyto typy:

- identita
- osová souměrnost
- středová souměrnost
- posunutí (translace)
- otočení (rotace)
- posunutá souměrnost

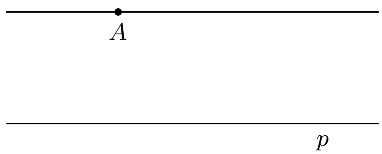
Dále uvedeme důležitou větu týkající se těchto zobrazení, kterou lze jednoduše dokázat.

Věta 2.1. *Každé shodné zobrazení lze složit nejvýše ze tří osových souměrností.*

Je zřejmé, že úlohu základního kamene při výstavbě shodných zobrazení má osová souměrnost, která je určena osou, tj. nějakou přímkou. Podívejme se nyní na klasifikaci, resp. vzájemnou polohu přímek v *Lobačevského rovině*, která byla žákům na nižších stupních škol doposud skryta. Poté budeme moci zavést shodná zobrazení i v této nové rovině, která bývá nazývána po svém nejvýznamnějším objeviteli N. I. Lobačevském[1)] nebo bývá označována jako hyperbolická rovina.

3. Přímky v Lobačevského rovině

V eukleidovské rovině mohou být dvě přímky buď ve vztahu různoběžnosti nebo rovnoběžnosti a především zde platí axiom rovnoběžnosti, který tvrdí, že bodem A ležícím mimo danou přímku p lze vést právě jednu nerůznoběžku. Tuto přímku nazýváme *rovnoběžkou* (obr. 1).



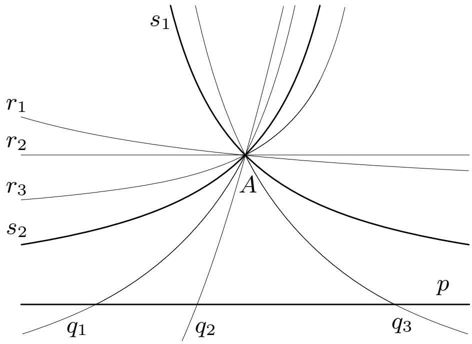
Obr. 1

Naproti tomu v Lobačevského rovině je situace o něco složitější, neboť zde platí následující axiom.

Lobačevského axiom: *Bodem ležícím mimo danou přímku lze vést alespoň dvě nerůznoběžky.*

Lze dokázat, že těchto nerůznoběžek je nekonečně mnoho a navíc mezi nimi jsou dvě přímky, které se chovají k původní přímce „asymptoticky“, tj. vykazují stejnou vlastnost jako např. asymptota hyperboly. Nazýváme je *souběžky.* V Lobačevského rovině existuje tedy nekonečně mnoho „rovnoběžek“ s danou přímkou p vedených daným bodem A na ní neležícím (nazývají se *rozběžky*), nekonečně mnoho různoběžek a dvě souběžky (různoběžky q_1, q_2, q_3, rozběžky r_1, r_2, r_3, souběžky s_1, s_2 na obr. 2).

[1)] Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856), ruský matematik

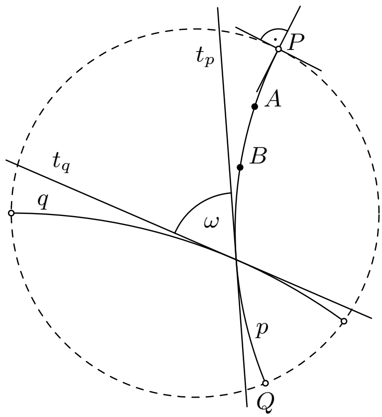


Obr. 2

4. Poincarého[2] kruhový model Lobačevského roviny

V běžné eukleidovské rovině zvolme kruh Γ. Rovinou Lobačevského budeme rozumět vnitřek kruhu $\mathrm{int}(\Gamma)$ a body uvnitř tohoto kruhu nazveme *P-body*[3]. *P-přímky* budou dvojího druhu: (a) všechny průměry kruhu Γ bez krajních bodů, (b) otevřené kruhové oblouky, které vzniknou jako průnik $\mathrm{int}(\Gamma)$ a eukleidovských kružnic, které kolmo protínají hraniční kružnici kruhu Γ[4].

Body hraniční kružnice budou nevlastní body Lobačevského roviny (obr. 3).



Obr. 3

[2] Henri Poincaré (1854–1912), francouzský matematik a fyzik

[3] Jsou to body hyperbolické roviny znázorněné v Pioncarého modelu. Analogicky pak máme P-úsečky a další P-útvary.

[4] Dvě kružnice se protínají kolmo, právě když mají kolmé tečny ve společném bodě. Na obr. 3 je tato situace znázorněna v bodě P.

Zaměříme se nyní na pro nás podstatné vlastnosti tohoto modelu. Důležité bude zavedení délky úsečky v Lobačevského rovině a pojem shodnosti.

Definice 4.1. *P-délku P-úsečky* v Poincarého kruhovém modelu definujeme vztahem

$$d_P(AB) = \left| \ln \left(\frac{|AP|}{|AQ|} \frac{|BQ|}{|BP|} \right) \right|,$$

kde P, Q jsou krajní body oblouku nebo průměru, na němž leží úsečka AB a kde $|AP|$, $|AQ|$, $|BQ|$, $|BP|$ jsou klasické eukleidovské vzdálenosti.

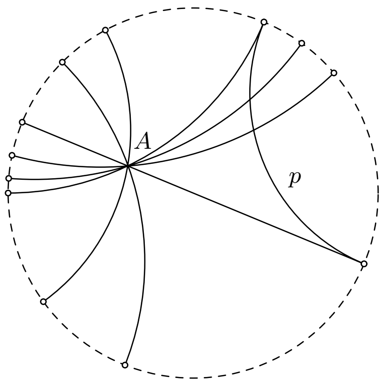
P-úsečky jsou pak *P-shodné*, jestliže mají stejnou P-délku. Dále platí

$$\lim_{A \to P} d_P(AB) = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{B \to Q} d_P(AB) = \infty,$$

tedy P-délky nabývají všech kladných reálných hodnot.

Shodnost úhlů je analogická s eukleidovskou rovinou, tj. měřit *P-úhly* mezi dvěma P-přímkami znamená měřit eukleidovské úhly mezi dvěma tečnami k daným dvěma P-přímkám v jejich průsečíku.

Jak je to s Lobačevského axiomem? Obr. 4 ukazuje, že bodem A ležícím mimo danou přímku p může procházet více nerůznoběžek, z nichž dvě vykazují vůči přímce p asymptotickou vlastnost – tyto přímky jsou souběžky, ostatní nerůznoběžky jsou rozběžky a poslední skupinou přímek jsou klasické různoběžky.



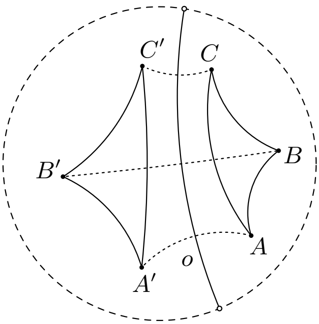
Obr. 4

Soustředili jsme se především na pojem shodnosti úseček a úhlů v tomto modelu, neboť níže se budeme věnovat shodným zobrazením v Lobačevského rovině a k prezentaci využijeme právě tento model neeukleidovské geometrie.

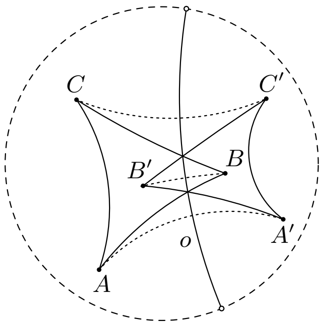
5. Osová souměrnost v Lobačevského rovině

Osová souměrnost je určena osou, tj. přímkou. Budeme zobrazovat nějaký jednoduchý rovinný útvar, např. trojúhelník. Mějme tedy dány P-trojúhelník ABC a P-přímku o, podle které trojúhelník zobrazíme v modelu, který jsme výše popsali (obr. 5a, 5b):

$$\mathcal{O}(o) : \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$$



Obr. 5a



Obr. 5b

V tomto zobrazení leží body A, A' na P-přímce, tj. na kružnici kolmé k P-ose o. Stejně tak další dvě dvojice vzoru a obrazu.

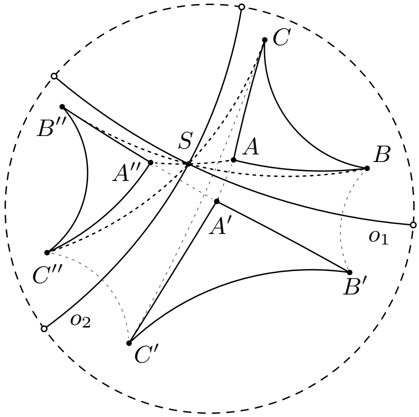
Změřme teď délky stran trojúhelníků a velikosti jejich vnitřních úhlů. Odpovídající si strany a úhly jsou shodné, pracujeme tedy se shodným zobrazením stejně jako v eukleidovské rovině[5]. Navíc z obr. 5b je patrná další analogie s klasickou rovinou, na P-ose o se totiž nacházejí všechny samodružné body tohoto zobrazení. Dále si můžeme všimnout, že i zde platí, že osová souměrnost je shodnost nepřímá.

6. Středová souměrnost v Lobačevského rovině

Středová souměrnost, která je určena středem, je shodné zobrazení a zároveň ji lze složit ze dvou osových souměrností s osami, které jsou

[5] Pozor, v Lobačevského geometrii platí věta *uuu* o shodnosti trojúhelníků, stačilo by nám tedy studovat jen vnitřní úhly v trojúhelnících!

vzájemně kolmé. Bude předchozí věta platit i v Lobačevského rovině? Vytvoříme si příslušnou situaci v Poincarého modelu (obr. 6).



Obr. 6

Složili jsme tedy dvě osové souměrnosti s ortogonálními P-osami o_1 a o_2, bod $S \in o_1 \cap o_2$ bude středem středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$. Zobrazme $\triangle ABC$ postupně v těchto osových souměrnostech:

$$\mathcal{O}(o_1) : \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$$
$$\mathcal{O}(o_2) : \triangle A'B'C' \to \triangle A''B''C''$$

Podívejme se, zda platí:

$$\mathcal{S}(S) : \triangle ABC \to \triangle A''B''C''$$

Skutečně je tomu tak, oba trojúhelníky jsou P-shodné, vzor, obraz a střed souměrnosti leží na P-přímce a P-vzdálenost středu od vzoru a obrazu je P-shodná. Navíc zjišťujeme, že středová souměrnost je přímá shodnost.

Jako kontrolu správnosti našich úvah si zkonstruujte P-přímky AA'', BB'', CC'', které musí procházet středem S středové souměrnosti.

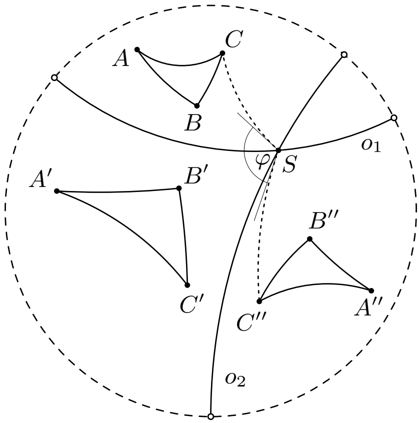
7. Otočení (rotace) v Lobačevského rovině

Mějme dány dvě P-různoběžky o_1 a o_2, které nejsou na sebe kolmé. Opět zobrazíme postupně trojúhelník ABC v osových souměrnostech $\mathcal{O}(o_1)$ a $\mathcal{O}(o_2)$ a ukážeme, že platí (obr. 7)

$$\mathcal{R}(S, \varphi) : \triangle ABC \to \triangle A''B''C'',$$

kde S je střed otočení a φ je úhel otočení.

Skutečně $|\sphericalangle ASA''| = |\sphericalangle BSB''| = |\sphericalangle CSC''| = \varphi$ a zároveň vzor a obraz jsou od středu rotace stejně vzdáleny. Navíc stejně jako v klasické rovině zde platí, že úhel rotace je dvojnásobkem odchylky dvou os, které otočení generují. Opět jde o přímou shodnost.



Obr. 7

8. Posunutí (translace) v Lobačevského rovině

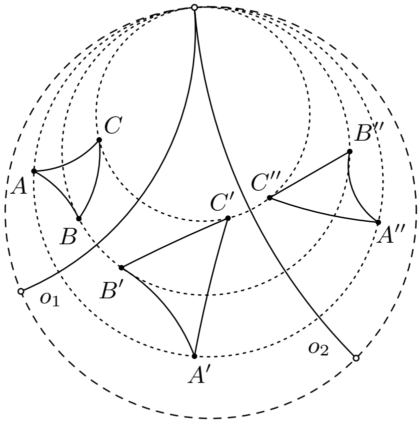
V klasické rovině je posunutí jednoznačně dáno vektorem posunutí, který určuje délku a směr posunutí. Platí také, že posunutí lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami. V Lobačevského rovině však neexistují „rovnoběžky" ve smyslu ekvidistant, nýbrž máme zde souběžky a rozběžky, které mají jiné vlastnosti než eukleidovské rovnoběžky. Zapomeňme tedy na klasické posunutí a zkusme složit dvě osové souměrnosti pro oba zbývající případy vzájemné polohy os.

8.1. Skládání osových souměrností s osami jako souběžkami

Dostáváme zajímavou situaci v Lobačevského rovině, kterou ilustruje obr. 8. Po změření úhlů a stran v $\triangle ABC$ a $\triangle A''B''C''$ zjišťujeme, že i v tomto případě dostáváme shodné zobrazení a vzor a obraz v příslušných osových souměrnostech se nacházejí na zvláštních křivkách, které se nazývají cykly. Nebudeme zde cykly definovat, jen zmíníme, že k nim dojdeme zobecněním definice kružnice[6]. Cykly na obr. 8 jsou určeny

[6] V tomto případě se cykl zobrazí jako eukleidovská kružnice.

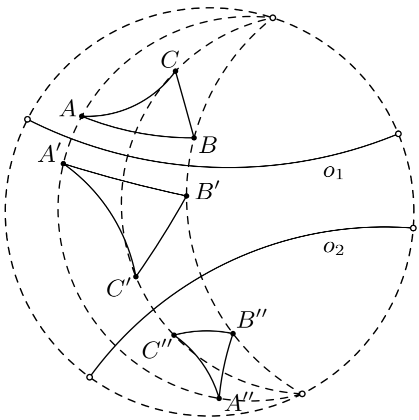
svazkem příslušných souběžek; je to patrné z toho, že všechny křivky se sbíhají v jednom nevlastním bodě.



Obr. 8

8.2. Skládání osových souměrností s osami jako rozběžkami

Jde o podobný případ jako předchozí, opět získáváme shodné zobrazení – ponecháme na čtenáři, jak takové zobrazení nazvat. Z obr. 9 je ještě patrné, že křivky určené vzory a obrazy (zde jsou to části cyklů) se opět sbíhají v nevlastních bodech („v nekonečnu"). Tyto cykly jsou určené svazkem příslušných P-os, tj. rozběžek.



Obr. 9

9. Závěr

Snažili jsme se ukázat, že skládání osových souměrností ve dvou různých geometriích se v podstatě kryje v případě různoběžnosti os a cesty se rozcházejí, pokud se narazí na problém rovnoběžnosti. Stále však platí, že „shodné zobrazení zůstává shodným zobrazením“.

Pro úplnost ještě přidejme jednu otázku. Kromě klasické eukleidovské a Lobačevského geometrie existuje ještě tzv. Riemannova geometrie, ve které neexistují nerůznoběžky, tzn. různé kolmice na danou přímku se vždy protínají. Jak je to se shodnými zobrazeními v tomto případě?

Vývoj pojmů v algebře a matematická olympiáda

Antonín Jančařík, PedF UK Praha

1. Úvod

Matematika, jako jedna z nejstarších vědních disciplín, procházela v průběhu minulých století a tisíciletí složitým vývojem. Během staletí nedocházelo jen k rozšiřování poznání a získávání nových vědomostí, ale také k vývoji jednotlivých pojmů, jejich utváření a zobecňování. Matematika byla často úzce spjata s filozofií a teologií. Například chápání a porozumění pojmu nekonečno není pouze otázkou matematickou, ale i filozofickou a teologickou. Také dokonalý svět geometrie vyžaduje pro své pochopení silnou míru abstrakce a dokonalost jeho objektů je velmi zajímavá i z pohledu filozofického.

Dnešní student či žák matematiky se seznamuje pouze s výsledky, deriváty tohoto vývoje. Časový rozsah, který lze výuce matematiky věnovat, nám nedovoluje opakovat všechny kroky a myšlenkové postupy, které k vytváření jednotlivých pojmů vedly. Navíc filozofické a teologické konstrukce, které byly s jednotlivými pojmy spjaté, jsou modernímu člověku často velmi vzdálené. Proto se nemůžeme divit, že žáci a studenti mají problémy porozumět tomu, co je přímka, bod či nekonečno.

Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.