Emil Calda

Jednotkový čtverec a čtyři obdélníky téhož obsahu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 3, 50–52

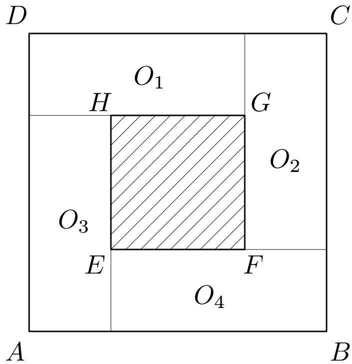
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146209

PRO ŽÁKY ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Jednotkový čtverec a čtyři obdélníky téhož obsahu

Emil Calda, MFF UK Praha

Jste-li v rozpacích nad poněkud záhadným názvem tohoto článku, snad vám ho objasní několik následujících vět a obr. 1, na němž je znázorněn jednotkový čtverec $ABCD$ a obdélníky O_1, O_2, O_3, O_4, o nichž víme, že mají stejný obsah, ale nevíme, zda jsou či nejsou shodné. Z obr. 1 se zdá, že vyšrafovaný čtyřúhelník $EFGH$, který je těmito obdélníky ohraničen, je čtverec. Chceme-li se přesvědčit, zda nás toto zdání neklame, obrátíme se na matematiku, která – jak uvidíme v následujících řádcích – toto zdání potvrdí.



Obr. 1

Předpokládejme proto, že každý z obdélníků O_1, O_2, O_3, O_4 v jednotkovém čtverci $ABCD$ na obr. 1 má stejný obsah S, pro který platí $S < \frac{1}{4}$, neboť dané čtyři obdélníky celý jednotkový čtverec nepokrývají. Označme dále a, b délky stran obdélníku O_1, kde $a > b$, takže je $S = ab$. Délky stran zbývajících tří obdélníků určíme z podmínky, že čtverec $ABCD$ je jednotkový a že obsah každého z daných obdélníků je roven S. Dostaneme tak, že:

O_2 má strany o délkách $1 - a$, $S/(1 - a)$

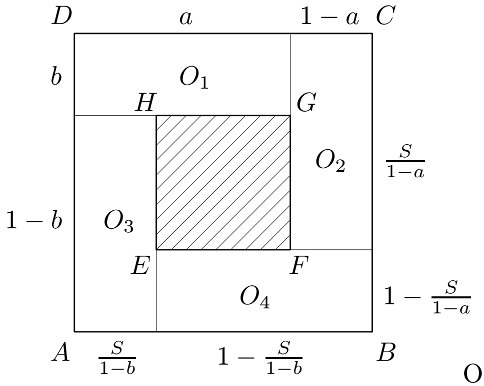
O_3 má strany o délkách $1 - b$, $S/(1 - b)$

O_4 má strany o délkách $1 - S/(1 - b)$, $1 - S/(1 - a)$

Odtud s pomocí obr. 2 určíme délky stran čtyřúhelníku $EFGH$:

$$|EF| = |GH| = 1 - \frac{S}{1-b} - (1-a) = a - \frac{S}{1-b}$$

$$|FG| = |HE| = \frac{S}{1-a} - b$$



Obr. 2

Využijeme nyní toho, že obsahy obdélníků O_1 a O_4 se rovnají, takže platí

$$\left[1 - \frac{S}{1-b}\right]\left[1 - \frac{S}{1-a}\right] = S,$$

odkud postupnými úpravami

$$(1-b-S)(1-a-S) = S(1-a-b+S),$$

$$1-a-b+2S(a+b-1) = 0,$$

$$(a+b-1)(2S-1) = 0,$$

dojdeme k rovnosti $a+b=1$, neboť $2S \neq 1$.

Z tohoto výsledku vyplývá, že dané čtyři obdélníky jsou shodné, neboť sousední strany každých dvou – jak se lze přesvědčit dosazením – mají délky a, b.

Dosadíme-li dále do výrazů pro délky stran čtyřúhelníku $EFGH$

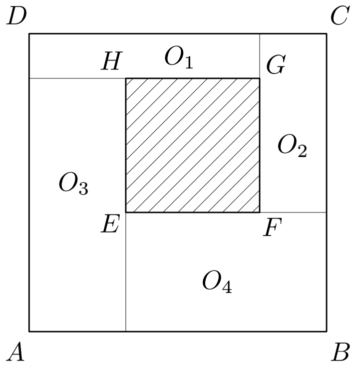
$$S = ab, \quad a = 1-b, \quad b = 1-a,$$

snadno zjistíme, že se tyto délky rovnají:

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HF| = a - b$$

Uvědomíme-li si ještě, že čtyřúhelník $EFGH$ je pravoúhelník, máme výsledek: *Čtyřúhelník EFGH, který je v jednotkovém čtverci podle obr. 1 ohraničen čtyřmi obdélníky téhož obsahu, je čtverec.*

Na závěr si ještě všimněme, že obrácená implikace k té, kterou jsme dokázali (*Mají-li obdélníky stejný obsah, je EFGH čtverec*), neplatí. Ukazuje to obr. 3, kde čtyřúhelník $EFGH$ je čtverec, ale obsahy aspoň dvou z daných obdélníků se liší.



Obr. 3

* * * * *

ZPĚVÁK

Walter Nernst (1864–1941), laureát Nobelovy ceny a jeden ze zakladatelů fyzikální chemie, je znám mnoha objevy v termodynamice a fyzice pevných látek. Jednou byl požádán, aby předvedl pruskému císařskému dvoru použití radiovln. Umístil tedy radiový přijímač v císařském zámku a sám vysílal z fyzikálního ústavu gramofonový záznam koncertu slavného italského zpěváka Enrica Carusa. Po produkci byl pozván do zámku a císařovna mu gratulovala: „Vážený pane profesore, neměli jsme tušení, že jste tak znamenitý zpěvák!“

Ivan Štoll *)

*) Z publikace *Historky o slavných fyzicích a matematicích, Praha*, Prometheus 2005