49. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 3, 32–49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146208

SOUTĚŽE

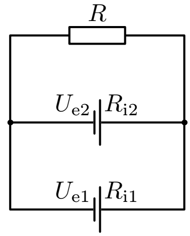
49. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola.

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81 \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.)

KATEGORIE A

1. Baterie článků

Dva paralelně spojené články tvoří baterii. Články mají elektromotorická napětí U_{e1}, U_{e2} a vnitřní odpory R_{i1}, R_{i2}. K baterii můžeme připojit rezistor o zcela libovolném odporu R.



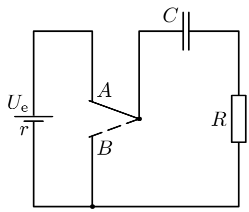
Obr. 1

a) Určete napětí U na rezistoru, má-li jeho odpor danou hodnotu $R = R_0$.
b) Určete podmínku pro odpor R rezistoru, aby jedním ze zdrojů protékal proud v opačném směru, než odpovídá jeho polaritě.
c) Určete odpor R' rezistoru, při němž je jeho příkon maximální, a tento maximální příkon P_{max}.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $U_{e1} = 1{,}2$ V, $U_{e2} = 2{,}1$ V, $R_{i1} = 0{,}5\ \Omega$, $R_{i2} = 2{,}0\ \Omega$, $R_0 = 6{,}0\ \Omega$.

2. Úsporný obvod

V obvodu, jehož schéma je na obr. 2, je spotřebič o odporu $R = 10\ \Omega$ napájen ze zdroje o elektromotorickém napětí $U_e = 100$ V a vnitřním odporu $r = 100\ \Omega$ přes kondenzátor o kapacitě $C = 200\ \mu$F a přepínač, který se 10krát za sekundu střídavě přepíná z kontaktu A na kontakt B a naopak. Doba potřebná k přepnutí z jedné polohy do druhé je zanedbatelná. V každé poloze tedy přepínač setrvává po dobu $t_1 = 0{,}10$ s. Za tuto dobu se kondenzátor po přepnutí ke kontaktu A prakticky zcela nabíjí a po přepnutí ke kontaktu B prakticky zcela vybíjí.



Obr. 2

Porovnejte účinnost obvodu a průměrný výkon spotřebiče v tomto zapojení a v obvodu, ve kterém by byl spotřebič o daném odporu R přímo připojen ke zdroji o daném elektromotorickém napětí U_e a daném vnitřním odporu r.

3. Hod kamenem přes budovu

Budovu šířky l a výšky h s rovnou střechou chceme přehodit kamenem tak, že počáteční rychlost kamene má být co nejmenší. Kámen opustí naši ruku ve výšce h_0 nad zemí.

a) V jaké vzdálenosti d_0 od budovy zvolíme počáteční bod vrhu?
b) Jaká musí být počáteční rychlost kamene?
c) V jaké vzdálenosti d od budovy kámen dopadne?
d) Jak dlouho kámen poletí?

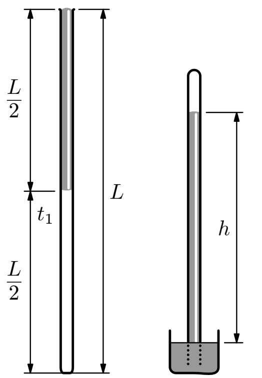
Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $l = 6{,}0$ m, $h = 5{,}0$ m, $h_0 = 2{,}0$ m. Odpor vzduchu zanedbejte.

4. Vypuzování rtuti

V úzké svislé trubici konstantního průřezu dlouhé $L = 120$ cm, dole zatavené, je při teplotě $t_1 = 17$ °C uzavřen sloupec vzduchu výšky $L/2$ stejně vysokým sloupcem rtuti (obr. 3). Trubici budeme velmi pomalu zahřívat.

a) Jak se bude v závislosti na teplotě měnit výška l sloupce vzduchu?
b) Jaké teploty musí dosáhnout vzduch v trubici, aby z ní všechna rtuť vytekla?

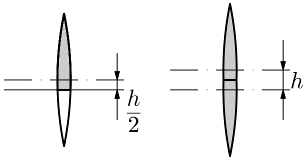
Sloupec rtuti ve rtuťovém barometru má výšku $h = 76$ cm. Změny hustoty rtuti při zahřívání trubice zanedbejte.



Obr. 3

5. Billetova dvojčočka

Dvě stejné spojky o ohniskové vzdálenosti $f = 25$ cm upravíme tak, že jejich menší část oddělíme řezem rovnoběžným s optickou osou vedeným ve vzdálenosti $h/2 = 1{,}0$ mm od středu čočky. Upravené čočky řeznou plochou přiložíme k sobě a slepíme (obr. 4).



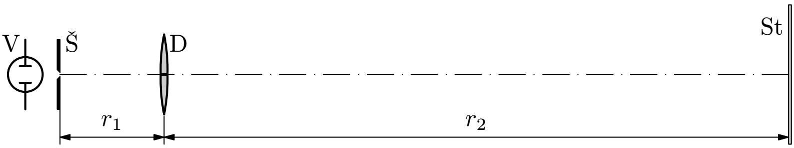
Obr. 4

Takto získanou dvojčočku osvětlíme monofrekvenčním světlem sodíkové výbojky o vlnové délce $\lambda = 589$ nm přes úzkou štěrbinu ležící v rovině souměrnosti dvojčočky ve vzdálenosti $r_1 = 2f$. Na stínítku ve vzdálenosti $r_2 = 5{,}0$ m od dvojčočky vznikne interferenční jev v podobě řady rovnoběžných světlých proužků – interferenčních maxim (obr. 5).

a) Určete vzdálenost středů sousedních interferenčních proužků.

b) Určete celkovou šířku oblasti na stínítku, kde se interferenční proužky objeví.

Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Tloušťku dvojčočky zanedbejte.



Obr. 5

6. *Praktická úloha*:
Určení modulu pružnosti ve smyku a momentu setrvačnosti

Teorie:
Zavěšením osově souměrného tělesa o momentu setrvačnosti J na drát délky l a poloměru r vyrobený z materiálu o *modulu pružnosti ve smyku* G, který splývá s osou souměrnosti tělesa, získáme *torzní oscilátor*. Jestliže těleso pootočíme z rovnovážné polohy a uvolníme, začne konat otáčivý harmonický kmitavý pohyb s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k_\mathrm{t}}}, \quad \text{kde} \quad k_\mathrm{t} = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

je *torzní tuhost* (direkční moment) drátu.

Úkoly:

a) Zhotovte torzní oscilátor zavěšením vodorovné tenké dlouhé tyče uprostřed její délky na svislý drát. Změřte délku tyče a drátu, průměr drátu, hmotnost tyče a periodu torzních kmitů. Z naměřených hodnot určete modul pružnosti ve smyku materiálu, ze kterého je vyroben drát.

b) Na stejný drát zavěste uprostřed malou litinovou činku klasického tvaru (dvě koule spojené válcovou tyčí). Změřte délku drátu a periodu torzních kmitů. S užitím výsledků měření z úkolu a) určete moment setrvačnosti činky vzhledem k ose otáčení činky při kmitavém pohybu.

c) Změřte rozměry činky a její hmotnost a vypočtěte její moment setrvačnosti s užitím známých vzorců. Vypočtenou hodnotu J' porovnejte s hodnotou J určenou v úkolu b).

Pomůcky:

- ocelový drát o průměru 0,3 až 1 mm (vhodný je „vázací“ drát užívaný ve stavebnictví nebo „včelařský“ drát, v nouzi je možno použít i drát z jiného materiálu – měděný nebo hliníkový),
- kovová tyč ze stativového materiálu,
- litinová činka o hmotnosti do 2 kg (zapůjčíme v kabinetu Tv),
- držák horního konce drátu – např. malý stolní svěrák,
- délková měřidla – pravítko nebo svinovací měřidlo, posuvné měřidlo a mikrometr,
- stopky,
- váhy v robustnějším provedení.

Poznámky k realizaci:

- Drát připevníme k tyči nebo čince tak, že konec drátu v jejím středu dvakrát těsně ovineme a pak jej dvakrát až třikrát zakroutíme kolem drátu. Délku měříme až od konce zakroucení.
- Měření v úkolech a) a b) provádějte opakovaně (5 až 10krát), určete nejpravděpodobnější hodnoty a směrodatné odchylky změřených veličin a veličin vypočtených (G a J) – viz stud. text FO: B. Vybíral: *Zpracování dat fyzikálních měření*, KFO č. 52. Respektujte vliv meze nepřesnosti použitých délkových měřidel na chybu výsledku; hmotnost určenou vážením považujte za přesnou.

- Z hlediska chyby měření je nejcitlivější stanovení poloměru drátu – je malý a ve vzorci se vyskytuje ve čtvrté mocnině. Měříme jej mikrometrem.
- Stopky spouštíme a zastavujeme při průchodu zavěšeného tělesa rovnovážnou polohou, kterou vyznačíme vhodným indikačním tělesem. Měříme 5 period kmitů (nikoli kyvů).
- Při výpočtu momentu setrvačnosti činky v úkolu c) použijte vzorce pro moment setrvačnosti koule, moment setrvačnosti válce vzhledem k ose jdoucí jeho středem kolmo k rotační ose

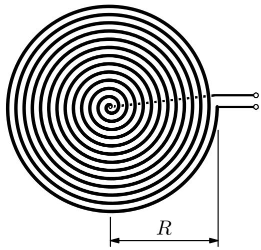
$$J = \frac{2}{5}mr^2\,, \qquad J = \frac{m}{4}\left(\frac{d^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$$

a Steinerovu větu. U tenké tyče lze vliv jejího průměru zanedbat.

7. Cívka ve tvaru spirály

Plochá cívka ve tvaru Archimedovy spirály o velkém počtu závitů n a vnějším poloměru R (obr. 6) je umístěna v homogenním magnetickém poli, jehož vektor magnetické indukce je kolmý k rovině cívky a mění se harmonicky podle zákona

$$B = B_\mathrm{m} \cos \omega t = B_\mathrm{m} \cos(2\pi f t).$$



Obr. 6

Určete, jaké elektromotorické napětí se v cívce indukuje. Vzdálenost sousedních závitů Archimedovy spirály je konstantní.

Řešte obecně a pro hodnoty $n = 13$, $R = 13$ mm, $B_\mathrm{m} = 1{,}5$ mT, $f = 1{,}0$ kHz.

KATEGORIE B

1. Dokonale pružná srážka

Ve výšce H nad zemí jsou těsně nad sebou umístěny dvě kuličky zanedbatelných rozměrů o hmotnostech m_1 (hmotnost spodní kuličky), m_2. Spodní kuličku uvolníme a necháme padat volným pádem. V okamžiku, kdy se tato kulička odrazí od země, uvolníme druhou kuličku a opět ji necháme padat volným pádem. Obě kuličky se pohybují v téže svislé přímce, takže po nějaké době dojde k jejich srážce. Předpokládejte, že odraz první kuličky od země a srážka obou kuliček jsou dokonale pružné a odpor vzduchu je zanedbatelný.

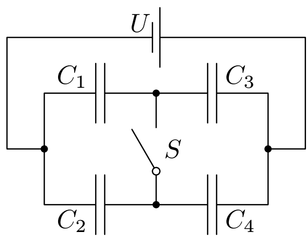
a) Určete, v jaké výšce nad zemí a jakými rychlostmi $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ se kuličky srazí.
b) Určete rychlosti $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ obou kuliček bezprostředně po srážce v závislosti na poměru $m_1/m_2 = k$.
c) Popište pohyb kuliček po srážce. Vypočtěte, do jaké výšky vystoupí 2. kulička po srážce pro $k = \frac{1}{2}$, $k = 3$ a $k = 10$.

Výsledky v úlohách a) až c) vyjádřete pomocí výšky H.

2. Kondenzátory

Na obr. 1 je znázorněn elektrický obvod obsahující zdroj stejnosměrného napětí $U = 24$ V, spínač S a kondenzátory o kapacitách $C_1 = 10$ F, $C_2 = 2C_1$, $C_3 = 3C_1$ a $C_4 = 4C_1$.

a) Určete napětí a náboje na jednotlivých kondenzátorech, je-li spínač S rozepnut.
b) Určete napětí a náboje na jednotlivých kondenzátorech, je-li spínač S sepnut.



Obr. 1

3. Let po uzavřené dráze

Letadlo má dvakrát letět po uzavřené trase $ABCA$. Body A, B, C leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Velikost v rychlosti letadla vzhledem k okolnímu vzduchu je konstantní. Při prvním letu však bude foukat vítr o konstantní rychlosti $u < v$ ve směru od A do B a při druhém letu vítr stejně velké rychlosti ve směru od B do A.

a) Jaká bude rychlost letadla na jednotlivých úsecích trasy v prvním a ve druhém případě? O jaký úhel musí být osa letadla odchýlena od směru letu?
b) V kterém případě bude celková doba letu větší?

Dobu potřebnou ke změně kurzu při přeletu nad body B a C zanedbejte.

4. Spalovací motor

Čtyřdobý čtyřválcový benzinový motor Felicie se zdvihovým objemem jednoho válce $V_z = V_{\max} - V_{\min} = 322\ \mathrm{cm}^3$ a kompresním poměrem $\varepsilon = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = 8{,}8$ nasává palivovou směs (vzduch s nepatrným množstvím benzinu) při tlaku $p_1 = 0{,}10$ MPa a teplotě $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$. Následující děj ve válci můžeme modelovat jako cyklus, ve kterém po sobě následují:

- adiabatická komprese 1–2, při které se objem pracovní látky (směsi) zmenší z $V_1 = V_{\max}$ na $V_2 = V_{\min}$, teplota se zvětší z t_1 na t_2 a tlak z p_1 na p_2,
- izochorické ohřátí pracovní látky 2–3, při které se teplota ve válci zvětší na t_3 a tlak na p_3,
- adiabatická expanze 3–4 na počáteční objem V_1, při které tlak ve válci klesne na p_4 a teplota na t_4,
- izochorické ochlazení pracovní látky na počáteční teplotu a tlak.

Následuje výfuk, nové sání a celý cyklus se opakuje. Předpokládáme, že při izochorickém ohřátí 2–3 dosáhneme poměru $p_3/p_2 = 2{,}5$. Vlastnosti palivové směsi popisují veličiny $M_r = 32$, $c_V = 0{,}65\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, $\kappa = 1{,}4$. Určete

a) základní stavové veličiny p, V, T pro jednotlivé body pracovního cyklu,
b) hmotnost směsi ve válci (směs považujte za ideální plyn),
c) množství tepla přijatého a odevzdaného pracovní látkou v průběhu jednoho cyklu, práci vykonanou při jednom cyklu a tepelnou účinnost motoru,
d) teoretický výkon motoru a hodinovou spotřebu paliva s výhřevností $H = 42\,000\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, má-li motor 4000 ot/min.

5. Pohyb družice

Družice Země se pohybuje po kruhové trajektorii kolem Země ve výšce $h = 0{,}10 R_z$ nad povrchem Země. Trajektorie pohybu družice má být převedena na eliptickou, a to tak, že při průchodu perigeem by měla být vzdálena $0{,}10 R_z$ od povrchu Země, při průchodu apogeem je její vzdálenost od povrchu Země $10 R_z$.

a) Jak musíme zvětšit rychlost družice, aby přešla z kruhové trajektorie na požadovanou eliptickou trajektorii? Předpokládáme, že doba potřebná k urychlení je mnohem menší než doba oběhu na kruhové trajektorii.

b) Určete dobu oběhu T_1 družice na kruhové trajektorii a dobu oběhu družice T_2 na eliptické trajektorii. Kolikrát se zvětší doba oběhu družice na eliptické trajektorii oproti trajektorii kruhové?

Hmotnost Země $M_z = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, poloměr Země $R_z = 6400$ km, gravitační konstanta $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Návod k řešení úlohy je možno nalézt ve studijním textu *Pohyb těles po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli*, který je možno stáhnout např. z Internetu ze stránek `http://www.uhk.cz/fo` nebo ze stránek `http://fo.cuni.cz`.

6. *Praktická úloha*:
Studium kmitů deklinační magnetky

Pomůcky: cívka 300 z/5 A z rozkladného transformátoru, reostat 16 Ω/4 A, ampérmetr, zdroj stejnosměrného napětí 12 V, malá deklinační magnetka, stopky.

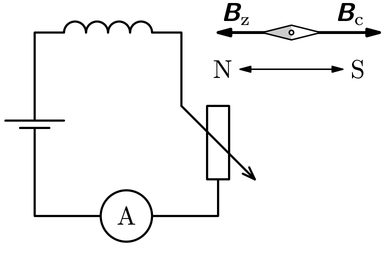
Úkol:
Ověřte, že závislost periody malých kmitů deklinační magnetky okolo rovnovážné polohy na velikosti B horizontální složky magnetické indukce pole je popsána vztahem

$$T = kB^m\,, \qquad (1)$$

kde k a m jsou konstanty. Určete hodnotu konstanty m, která by neměla záviset na použité magnetce.

Provedení úlohy:

- Cívku umístíme do vzdálenosti asi 15 cm od magnetky tak, aby její osa splývala s podélnou osou deklinační magnetky. Zdroj napětí připojíme k cívce přes reostat a ampérmetr tak, aby magnetická indukce $\boldsymbol{B}_c$ cívky v místě magnetky měla opačný směr než horizontální složka $\boldsymbol{B}_z$ magnetického pole Země (obr. 2).



Obr. 2

- Proud v obvodu nastavíme na hodnotu $I_0 = 1$ A a vzdálenost cívky od magnetky upravíme tak, aby se magnetka po vychýlení přestala vracet do rovnovážné polohy. Tím dosáhneme rovnosti $B_{c0} = B_z$, kde B_{c0} je velikost magnetické indukce pole cívky v místě magnetky při proudu I_0.
- Reostatem postupně nastavíme alespoň 10 různých hodnot proudu $I > I_0$. Pokaždé změříme periodu kmitů magnetky po jejím malém vychýlení z rovnovážné polohy. Výsledky měření zapíšeme do tabulky:

i	I/A	$10T/\mathrm{s}$	T/s	$\log(I - I_0)$	$\log T$
1					
2					
$\vdots$					

Vyhodnocení měření:

Velikost B_c indukce magnetického pole cívky v místě magnetky je přímo úměrná procházejícímu proudu, konstantu úměrnosti označíme k_1:

$$B_c = k_1 I\,, \qquad B_z = B_{c0} = k_1 I_0\,.$$

Velikost B výsledné horizontální složky magnetické indukce v místě magnetky je tedy $B = k_1(I - I_0)$. Dosazením do (1) dostaneme

$$T = k[k_1(I - I_0)]^m = K(I - I_0)^m\,, \tag{2}$$

kde $K = k \cdot k_1^m$. Zlogaritmováním vztahu (2) dojdeme k lineárnímu vztahu mezi proměnnými $y = \log T$ a $x = \log(I - I_0)$:

$$\log T = m \log(I - I_0) + \log K\,, \quad \text{tj.} \quad y = mx + \log K\,. \tag{3}$$

Zpracování naměřených hodnot:

a) Z výsledků měření sestrojte graf funkce (3).
b) Z grafu funkce (3) určete konstantu m a vyjádřete ji ve tvaru $m \approx \frac{p}{q}$, kde p, q jsou malá celá čísla.
c) Určete fyzikální rozměr konstanty k ze vztahu (1).

Poznámky:

a) Je třeba použít magnetku malých rozměrů, u velkých dochází k tlumení. Magnetku vychýlit jen o malý úhel do 20°. Cívku a magnetku umístit na dřevěný stůl co nejdále od kovových předmětů – připojení ke zdroji, reostatu ampérmetru provést dlouhými vodiči.

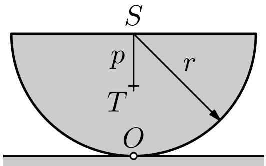
b) Zpracování naměřených hodnot doporučujeme provést v Excelu – zvolit *XY bodový graf*, přidat *spojnici trendu* a zobrazit *rovnici regrese* a *koeficient spolehlivosti*.

7. Kolébání půlválce

Homogenní půlválec o poloměru r a hmotnosti m leží na vodorovné rovině (obr. 3).

a) Určete moment setrvačnosti půlválce vzhledem k přímce, ve které se půlválec dotýká roviny.

b) Půlválec vykloníme o malý úhel z rovnovážné polohy a pustíme. S jakou periodou se bude kolébat?



Obr. 3

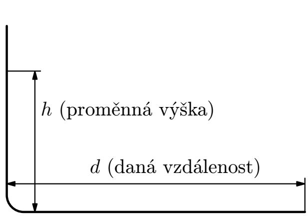
Řešte obecně a pro hodnoty $r = 15$ cm, $m = 45$ kg.

Předpokládáme, že tření mezi půlválcem a rovinou je dostatečně velké, aby nedošlo k prokluzování, a že valivý odpor je zanedbatelný. Těžiště půlváce se nachází ve vzdálenosti $p = \frac{4r}{3\pi}$ od středu. Pro malé úhly můžete použít aproximace $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

KATEGORIE C

1. Pád při stěně

Drobné tělísko padalo volným pádem podél svislé stěny z výšky h a dole po hladkém oblém přechodu přešlo na hladkou vodorovnou rovinu, po které se klouzalo do vzdálenosti d (obr. 1). Třecí síla a odpor vzduchu byly po celou dobu uvažovaného pohybu zanedbatelné. Také velikost oblého přechodu je zanedbatelná.



Obr. 1

a) Určete závislost celkové doby pohybu t na proměnné počáteční výšce h, z níž je těleso spuštěno.
b) Sestrojte graf této závislosti pro $d = 4{,}5$ m a h v intervalu $\langle 0, 2d\rangle$. Úkol proveďte tak, že sestrojíte graf doby pádu na svislém úseku, poté graf doby pohybu na vodorovném úseku a nakonec součtový graf těchto funkcí.
c) Najděte takovou výšku H, pro kterou je celková doba pohybu minimální, a určete tuto dobu $t_{\min}$. Úlohu je možné řešit bez derivace, pro úpravu výrazu s racionálními exponenty lze použít vztah

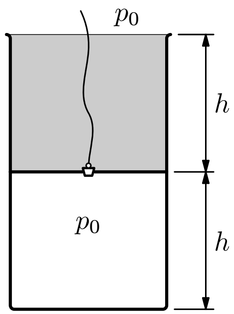
$$A^2 + B^2 = A^2 - 2AB + B^2 + 2AB = (A - B)^2 + 2AB\,.$$

Úlohu řešte obecně, pak pro hodnotu $d = 4{,}5$ m.

2. Válcová nádoba

Válcová nádoba výšky $2h$ je uprostřed opatřena vodorovnou přepážkou s malým otvorem. Horní část nádoby je naplněna vodou o hustotě ϱ, pod přepážkou je vzduch atmosférického tlaku p_0 (obr. 2). Otvor v přepážce uvolníme a voda začne protékat do dolní části nádoby. Děj bude probíhat za stálé teploty.

a) Do jaké výšky x musí vystoupit hladina v dolní části nádoby, aby vzduch začal probublávat otvorem v přepážce nahoru?
b) Jak se změní výsledek úlohy a), budeme-li do horní části nádoby plynule přilévat vodu a udržovat hladinu v původní výšce?



Obr. 2

Úlohu řešte obecně a pro hodnoty $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa, $\varrho = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $h = 1{,}00$ m.

3. Automobil

Po přímé vodorovné silnici jede osobní automobil stálou rychlostí o velikosti v. Hmotnost automobilu je 920 kg, valivý odpor kol a tření v ložiskách odhadujeme na 5 % tíhy automobilu. Čelní řez automobilu má obsah $S = 2{,}0\ \mathrm{m^2}$, hustota okolního vzduchu je $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, součinitel odporu automobilu je $C = 0{,}34$. Odporovou sílu, kterou na automobil působí okolní vzduch, lze určit z Newtonova vzorce $F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} C S \varrho v^2$. Automobil užívá benzin o hustotě $\varrho_\mathrm{p} = 720\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a výhřevnosti

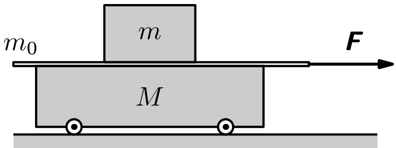
$H = 46\ \mathrm{MJ \cdot kg^{-1}}$ (tj. dokonalým spálením 1 kg benzinu získáme teplo $Q = 46\ \mathrm{MJ}$). Účinnost, s jakou automobil využije získané teplo, je 36 %.

a) Určete celkovou odporovou sílu působící na automobil, výkon automobilu, práci vykonanou automobilem na dráze $s = 100$ km a spotřebu benzinu V_p v litrech na 100 km při rychlostech $36\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $108\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $126\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a $144\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Z vypočtených hodnot sestavte tabulku.

b) Sestrojte graf závislosti spotřeby benzinu na rychlosti automobilu v intervalu $\langle 36\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}; 144\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \rangle$.

4. Pohyb s klouzáním

Na hladkém vodorovném stole leží vozík o hmotnosti $M = 3{,}00$ kg. Na něm je položen list papíru o hmotnosti $m_0 = 5{,}0$ g, na kterém leží kvádr o hmotnosti $m = 1{,}00$ kg. Součinitel smykového tření mezi papírem a každým z obou těles je $f = 0{,}70$. Valivý odpor koleček vozíku je zanedbatelný. Na list papíru začneme působit ve vodorovném směru silou $\boldsymbol{F}$ (obr. 3).



Obr. 3

a) Jakou podmínku musí splňovat velikost síly F, aby byl kvádr vzhledem k listu papíru v klidu?

b) Jakou podmínku musí splňovat velikost síly F, aby byl vozík vzhledem k listu papíru v klidu?

c) Určete zrychlení listu papíru, jestliže 1) $F = 3$ N, 2) $F = 11$ N.

Rozdíl mezi součinitelem smykového tření f a součinitelem klidového tření f_0 zanedbejte.

5. Extrasolární planeta

V agenturní zprávě se uvádí: *Ve vzdálenosti zhruba 20 světelných let se v souhvězdí Vah nachází hvězda* Gliese 581 *o zdánlivé hvězdné velikosti 10 magnitud. Hvězda je mnohem menší a chladnější než Slunce, což ji řadí do kategorie červených trpaslíků. V roce 2007 astronomové u ní objevili soustavu tří planet. Nejmenší z nich má parametry blízké planetě Zemi – její průměr je jeden a půl násobek průměru Země a její hmot-*

nost pětinásobkem hmotnosti Země. Kolem své mateřské hvězdy oběhne jednou za 13 dní ve vzdálenosti zhruba 14krát menší než je vzdálenost Země od Slunce. Z této těsné oběžné dráhy kolem chladné hvězdy plyne střední teplota povrchu mezi 0 až 40 °C. To by umožňovalo existenci vody v kapalném skupenství, což je jedna ze základních podmínek života.

Z údajů ze zprávy a bez použití hodnot z tabulek vyjádřete

a) střední hustotu ϱ planety jako násobek střední hustoty ϱ_z Země,
b) gravitační zrychlení a_g na povrchu planety jako násobek gravitačního zrychlení a_{gz} na povrchu Země,
c) únikovou (parabolickou) rychlost v_p na povrchu planety jako násobek únikové rychlosti v_{pz} na povrchu Země,
d) hmotnost M hvězdy jako násobek hmotnosti M_s Slunce.

6. *Praktická úloha*:
Měření viskozity vody

Úkol:

Určete viskozitu vody měřením průtoku vody tenkou vodorovnou trubicí.

Teorie:

Informace o veličině *viskozita* a jejím významu naleznete ve studijních textech z knihovničky FO: Vybíral, Zdeborová: *Odporové síly*, Vybíral, Zdeborová: *Pohyb těles s vlivem odporových sil.*

V naší úloze použijeme *Hagenův–Poisseuillův zákon* pro objemový průtok kapaliny tenkou trubicí při laminárním proudění

$$Q_V = \frac{V}{t} = \frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l}\,, \tag{1}$$

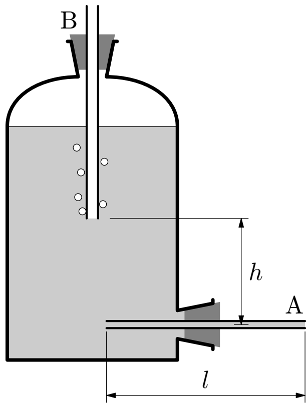
kde V je objem vody, která projde trubicí za dobu t, r je vnitřní poloměr trubice, η je viskozita vody, l je délka trubice a Δp je rozdíl tlaků vody na vstupu a výstupu trubice.

Postup:

1. Měření proveďte pomocí Mariottovy láhve upravené podle obr. 4. Do dolního otvoru zasuňte zátku s vodorovnou měřicí trubicí A o vnitřním poloměru 2 až 4 mm dlouhou 10 až 15 cm. (Pokud neseženete Mariottovu láhev, použijte upravenou plastovou láhev.) Láhev naplňte destilovanou vodou a horní otvor uzavřete zátkou se svislou trubicí B. Voda začne vytékat trubicí A. Jakmile z trubice B budou

vstupovat do láhve bublinky vzduchu, bude se mezi vstupem a výstupem měřicí trubice udržovat stálý rozdíl tlaků. Určete jeho velikost. *Výškový rozdíl h nastavte tak, aby voda vytékala co nejpomaleji, ale plynule.*

2. Vodu nechte vytékat do vhodné nádoby, dokud hladina v láhvi neklesne k dolnímu konci trubice B, a změřte dobu vytékání t. Objem vody V určete vážením nebo odměrným válcem.
3. Pečlivě určete vnitřní poloměr trubice r. Použijte různé metody a výsledky porovnejte. Proč je tak důležité přesně určit poloměr?
   Jednou z možností je zvážit suchou prázdnou trubici (delší kus) a pak tutéž trubici naplněnou vodou a uzavřenou malými kousky žvýkačky. Rozdíl hmotností je roven hmotnosti vody v trubici a je z něj možno určit vnitřní poloměr.
4. S použitím vztahu (1) určete viskozitu vody a vyhodnoťte chybu měření.
5. Měření proveďte při různé teplotě vody v rozmezí 10 °C až 50 °C a nakreslete graf závislosti viskozity na teplotě.



Obr. 4

6. Výsledky měření porovnejte s hodnotami v tabulkách (např. Brož, Roskovec, Valouch: *Fyzikální a matematické tabulky*, SNTL, Praha 1980).

7. Ethanolový teploměr

Nádobka i kapilární trubice ethanolového teploměru pro měření teplot v intervalu od 0 °C do 80 °C jsou vyrobeny ze skla, jehož délkové rozměry se v daném oboru mění v závislosti na teplotě lineárně, přičemž teplotní součinitel délkové roztažnosti pro vztažnou teplotu 0 °C je $\alpha = 8{,}3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$. Závislost hustoty ethanolu na teplotě v intervalu 0 °C až 80 °C je naopak dosti nelineární, což je zřejmé z tabulky:

t/°C	ϱ/kg · m^{-3}	t/°C	ϱ/kg · m^{-3}	t/°C	ϱ/kg · m^{-3}
0	806,3	30	781	60	754
10	797,9	40	772	70	745
20	789,5	50	763	80	735

Stupnice teploměru je vyryta na kapilární trubici a má při teplotě $0\ ^\circ\mathrm{C}$ délku $l_0 = 20{,}0$ cm, obsah vnitřního průřezu kapiláry při $0\ ^\circ\mathrm{C}$ je $S_0 = 1{,}00\ \mathrm{mm}^2$.

a) Určete objem V_0 nádobky teploměru včetně dolní části kapiláry pod stupnicí při teplotě $0\ ^\circ\mathrm{C}$.

b) Určete polohu bodů stupnice teploměru po $10\ ^\circ\mathrm{C}$ a stupnici narýsujte.

c) Při řešení nejprve počítejte i se závislostí délky stupnice a obsahu vnitřního průřezu kapiláry na teplotě. Při druhém řešení tuto závislost zanedbejte. Jak se změní výsledky?

KATEGORIE D

1. Jízda tunelem

Před tunelem délky $d = 320$ m stojí vlak tak, že přední nárazníky lokomotivy jsou přesně na začátku tunelu. Na signál průvodčího se vlak začal rozjíždět. V tomto okamžiku cestující stojící na samém konci vlaku zmáčkl stopky. Zaznamenal, že v čase $t_1 = 30$ s se dostal do tunelu a v čase $t_3 = 50$ s projížděl koncem tunelu. Po celou dobu byl pohyb vlaku rovnoměrně zrychlený.

a) Určete délku l vlaku a čas t_2 výjezdu předního konce lokomotivy z tunelu. Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

b) Sestrojte na intervalu $t \in \langle 0, t_3 \rangle$ graf závislosti rychlosti vlaku na čase a v grafu vyznačte obrazce vyjadřující délku vlaku a délku tunelu.

2. Let ve větru

Pilot se chtěl dostat do cílového místa ležícího v severním směru od místa startu. Nasměroval proto letadlo na sever, avšak nevzal v úvahu, že fouká jihozápadní vítr. Za dobu $t_1 = 60$ min zjistil, že se účinkem větru odchýlil od původního směru. Nasměroval proto podélnou osu letadla na západ a za další dobu $t_2 = 15$ min dosáhl cíle. Velikost rychlosti letadla za bezvětří je $v_1 = 180$ km/h.

a) Určete vzdálenost d cíle od startu a velikost v_2 rychlosti větru. Nakreslete obrázek s využitím principu superpozice. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

b) Určete velikosti u_1, u_2 rychlostí letadla vzhledem k zemi v první a v druhé fázi letu. Úlohu řešte graficky, velikost v_2 rychlosti větru určenou v úloze a) považujte při konstrukci za známou.

V uvažovaném letovém prostoru považujme poledníky za navzájem rovnoběžné přímky v rovinném zemském povrchu. Jihozápadní vítr je vítr vanoucí od jihozápadu, to znamená, že jeho směr svírá s poledníky i s rovnoběžkami úhel 45°.

3. Srážka vagonů

Prázdný vagon o hmotnosti m_0 se pohybuje po vodorovných kolejích rychlostí o velikosti v_1. Druhý stejný vagon je naložený a stojí na kolejích. Při nárazu se vagony automaticky spojí a dále se pohybují společně rychlostí o velikosti v.

a) Určete hmotnost m nákladu druhého vagonu.

b) Určete, kolik procent mechanické energie se během srážky přeměnilo na vnitřní energii.

c) Předpokládejme, že stojící vagon může mít náklad od nulové hmotnosti až po hmotnost maximální $m_{\max} = 2m_0$. První vagon na něj opět najíždí rychlostí o velikosti v_1. Určete minimální velikost rychlosti $v_{\min}$ a maximální velikost rychlostí $v_{\max}$, kterými se po nárazu prázdného vagonu souprava může pohybovat.

Úlohy a), b) řešte nejprve obecně, pak pro hodnotu $v = 0{,}3v_1$.

4. Kyvadlo

Malá kulička o hmotnosti m je zavěšena na vlákně délky l.

a) Kuličku vychýlíme z rovnovážné polohy tak, že napnuté vlákno je vodorovné, a uvolníme. Určete velikost síly, kterou je napínáno vlákno při průchodu rovnovážnou polohou.

b) Kuličku vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel α a uvolníme. Určete velikost síly, kterou je napínáno vlákno při průchodu rovnovážnou polohou. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnotu $\alpha = 75°$.

c) Určete úhel α_1 výchylky, při které je vlákno v okamžiku průchodu rovnovážnou polohou napínáno dvakrát větší silou, než když kulička visí v klidu.

5. Rozpad střely

Střela skládající se ze dvou částí obsahuje pružinový systém nastavitelný tak, že během letu se obě části v podélné ose střely od sebe oddělí. Neaktivovaná střela byla vystřelena prakem ze země svisle vzhůru a dopadla jako celek na zem v čase $t_0 = 6{,}0$ s. Jestliže je střela aktivována v nejvyšší poloze svého letu, dopadne spodní část střely na zem v čase $t_1 = 5{,}0$ s. Podélná osa střely zachovává během celého letu svislý směr. Hmotnosti horní a dolní části střely jsou v poměru $m_2 : m_1 = 1 : 3$. Odpor vzduchu zanedbejte.

a) Určete maximální výšku h_m horní části střely nad zemí a čas t_2 dopadu horní části střely měřený od okamžiku vystřelení celé střely, jestliže je střela aktivována v nejvyšší poloze.

b) Určete maximální výšku h'_m horní části střely, bude-li systém aktivován již v čase $t' = 1{,}2$ s po vystřelení prakem.

6. *Praktická úloha*:
Studium pohybu kyvadla

Na nit zanedbatelné hmotnosti zavěsíme těleso zanedbatelných rozměrů vzhledem k délce závěsu. Po vychýlení z rovnovážné polohy a po uvolnění začne těleso konat periodický kmitavý pohyb. Pomocí stopek budeme měřit periodu těchto kmitů.

a) Ověřte měřením, že perioda T kmitů prakticky nezávisí na počáteční výchylce, pokud je malá v porovnání s délkou závěsu.

b) Nastavte postupně 8 až 10 různých délek l závěsu a při respektování výsledku úlohy a) pro každou změřte dobu 20 period. Výsledky zapište do tabulky a vypočtěte zbývající hodnoty.

$\frac{l}{\mathrm{m}}$	$\frac{20T}{\mathrm{s}}$	$\frac{T}{\mathrm{s}}$	$\frac{l^2}{\mathrm{m}^2}$	$\frac{T^2}{\mathrm{s}^2}$

c) Budeme předpokládat, že platí právě jedna ze tří přímých úměrností:

1. $T = kl$, tj. perioda kmitů je přímo úměrná délce závěsu.
2. $T^2 = kl$, tj. druhá mocnina periody kmitů je přímo úměrná délce závěsu.

3. $T = kl^2$, tj. perioda kmitů je přímo úměrná druhé mocnině délky závěsu.

Podle vyplněné tabulky vyneste do grafů body jednotlivých závislostí a tam, kde budou nejlépe ležet v přímce procházející počátkem, tuto přímku sestrojte. Určete směrnici k sestrojené přímky. Grafické zpracování proveďte, pokud možno, na počítači, například v programu Excel.

d) Z teorie pohybu tzv. matematického kyvadla, jemuž se použité kyvadlo blíží, plyne pro měřenou konstantu přímé úměrnosti $k' = 4\pi^2/g$, kde g je tíhové zrychlení. Porovnejte hodnotu této konstanty s hodnotou určenou v úloze c).

e) Zformulujte závěr, jak závisí perioda kmitů kyvadla na jeho délce.

Návod zpracování úlohy v Excelu:

Vyplňte první dva sloupce tabulky naměřenými hodnotami a užitím vzorců dopočítejte zbývající sloupce. Kurzorem označte vždy dvojici sloupců s daty a vložte *Graf*. Volte typ grafu *XY bodový*, podtyp *bodový* (tj. bez spojnic datových bodů) – zobrazí se soustava izolovaných bodů. Po kliknutí pravým tlačítkem myši na libovolný z nich zvolte z nabídky *Přidat spojnici trendu*, dále *Typ trendu – Lineární*, v *Možnostech* vyberte *Hodnota* $y = 0$ a *Zobrazit rovnici regrese*. Tím se zobrazí přímka směřující do počátku a rovnice této přímky, z níž přečteme směrnici.

7. Země a Venuše

Země a Venuše obíhají kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic s periodami oběhu $T_z = 365{,}25$ d a $T_v = 224{,}63$ d. Pro jednoduchost dále předpokládejme, že trajektorie obou planet tvoří kružnice ležící v téže rovině. Poloměr trajektorie Země je $r_z = 149{,}6 \cdot 10^6$ m.

a) Určete z údajů v zadání poloměr r_v trajektorie Venuše.

b) Venuše se někdy nazývá buď Jitřenka nebo Večernice. Vysvětlete a zdůvodněte tato pojmenování.

c) Určete z údajů v zadání maximální elongaci Venuše, tj. maximální úhel α, který svírají spojnice pozemského pozorovatele s Venuší a se Sluncem.

d) Určete z údajů v zadání dobu T, po které se opakuje stejná vzájemná pozice Země, Venuše a Slunce, tzv. synodickou dobu oběhu Venuše.

Úlohy a), c), d) řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.