Rozhledy matematicko-fyzikální

Václav Potoček

Matematické modelování Chladniho obrazců na počítači

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 2, 16–25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146193

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2007

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

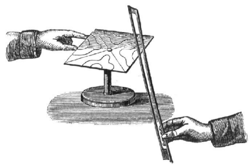
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

FYZIKA

Matematické modelování Chladniho obrazců na počítači

Václav Potoček, FJFI ČVUT Praha

Úvod



Obr. 1

Chladniho obrazci nazýváme obecně útvary uzlových čar, které vznikají při kmitání plošných objektů. Nejsnáze se v praxi předvedou, když na povrch kovové desky nasypeme písek nebo jemný prášek a poté ji rozezníme např. tahem smyčce, jak ukazuje obr. 1. Prášek je zvukovými kmity desky nadhazován a posunován, a uspořádá se tak na místech, kde jsou kmity nejslabší. Jedná se o uzly stojaté vlny, ale protože ty na ploše tvoří spojité útvary, používá se název *uzlové čáry*.

V tomto provedení také obrazce poprvé předvedl jejich objevitel, německý fyzik Ernst Florens Friedrich Chladni, roku 1808 na půdě Francouzské akademie věd. Tento experiment měl velký úspěch, silně zaujal například i císaře Napoleona. Chladni se začal zabývat jejich popisováním, později zakresloval katalogy obrazců vznikajících na čtvercových a kruhových deskách, ale jejich matematická podstata mu nebyla známa.

Vzorec stojaté vlny

Způsob odvozování matematického popisu Chladniho obrazců silně závisí na tvaru uvažované desky. My prozkoumáme chování desek čtvercového tvaru. Zobecnění například na desky tvaru obdélníka by ještě mnoho nových problémů nepřineslo, ale počítání obrazců na kruhových deskách již vyžaduje postupy a speciální funkce, které dalece přesahují rozsah středoškolské matematiky. Kmitání desek komplikovanějších tvarů se pak již neodvozuje vůbec a počítá se jen numericky.

Postup, který zde provedeme, bude spíše jen naznačením odvození hledaného vzorce – některá důležitá tvrzení budeme muset přijmout jako fakt bez důkazu. Dá se k nim dojít důkladnějším rozborem, který však svým rozsahem překračuje možnosti tohoto článku.

Jak již bylo řečeno, tvar Chladniho obrazců je dán stojatou vlnou, která při kmitání desky vzniká. Budeme tedy hledat možné tvary funkcí určujících okamžitou výchylku takových vln a zkusíme přitom použít znalost vzorců stojatých vln na strunách, které se odvozují ve středoškolské fyzice. Připomeňme si je spolu s některými základními fakty.

Stojaté vlnění se vždy vyznačuje tím, že všechny body uvažovaného prostředí kmitají se stejnou frekvencí a ve stejné fázi, liší se jen jejich amplitudy. Existuje tak nějaký tvar struny, resp. desky, který se postupem času jen více či méně vychyluje od rovnovážného stavu, periodicky přes tento stav přechází na opačnou stranu a zase zpět. Tento fakt se ve vzorci pro okamžitou výchylku projeví výskytem časového členu $\sin(\omega t + \varphi_0)$ a výrazu určujícího amplitudu každého bodu, který je pouze funkcí souřadnic. Místa, v nichž je amplituda rovna 0, vůbec nekmitají a nazývají se *uzly stojaté vlny*.

V případě stojatého vlnění struny je závislost výchylky na čase sinusová (*harmonická*) a na celé délce struny má stojaté vlnění vždy celý počet čtvrtvln. Na začátku a na konci struny má výchylka buď maximální hodnotu nebo nulovou hodnotu – podle toho, zda je tento konec volný nebo pevný. Případ s oběma konci volnými není na struně tak častý – má využití spíše u jiných prostředí, např. vzduchového sloupce – my však budeme uvažovat desku vždy s volnými konci, a proto použijeme i takový model struny.

Jestliže jednomu konci struny přiřadíme souřadnici 0 a druhému a, pak funkcí určující výchylku struny z může být

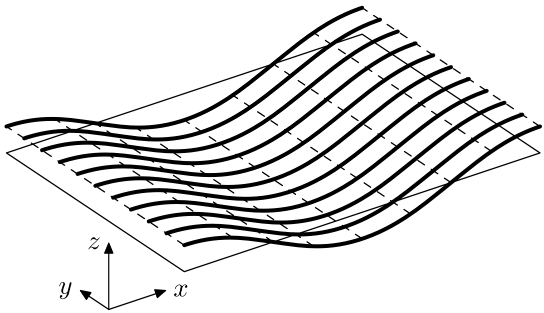
$$z = A\cos\frac{m\pi x}{a},$$

kde x je vzdálenost místa na struně od jejího začátku. Volba funkce kosinus zajistí maximální výchylky na začátku struny. Stejná podmínka na konci struny pak omezuje volbu m na celá čísla. Změna m za jeho opačnou hodnotu tuto funkci nezmění, proto nám dokonce stačí uvažovat jen přirozená čísla a nulu, $m \in \mathbb{N}_0$. Reálné číslo A má význam amplitudy celé stojaté vlny. Ta je tedy nakonec popsána funkcí

$$\varphi(x,t) = A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Důležitý je ještě vztah hodnot m a ω. Obě totiž určují vlnovou délku kmitání a jsou jí jednoznačně svázány. Tak, pokud chceme dosáhnout stojaté vlny s m uzly, potřebujeme strunu rozkmitat s frekvencí $f = \frac{mc}{2a}$ a úhlovou frekvencí $\omega = \frac{m\pi c}{a}$, kde c je rychlost šíření zvuku v materiálu desky. Ve vzorcích ale budeme ponechávat hodnoty odpovídající m i ω a uvádět jen jejich vztah, kde bude potřeba.

Představme si nyní tenkou desku tvaru čtverce o straně délky a, kterou bychom myšleně rozdělili podél jedné ze stran na mnoho tenkých proužků. Jakmile se jejich šířka stane zanedbatelnou vzhledem k a, můžeme na každý z nich pohlížet jako na strunu s volnými konci. Nyní uvažujme, že by takové rovnoběžné struny kmitaly všechny kolmo k původní desce (ve směru osy z dle obr. 2), se stejnou frekvencí i amplitudou a ve stejné fázi. Pak by se všechny body se stejnou souřadnicí x pohybovaly zcela stejně a kmitání by nebylo ovlivněno, kdybychom mezi sebou úsečky pevně spojili. Tím jsme se ovšem vrátili k celé desce a můžeme říci, že známe jeden ze způsobů, jakým může kmitat.



Obr. 2

Tato informace není postačující pro řešení celé úlohy, ale pomůže nám uvědomit si důležitou skutečnost. Přestože jsme strany desky ponechali volné, spojnice uzlů myšlených strun vedou až k nim. Na desce tedy neplatí, že by všechny okrajové body musely kmitat s nejvyšší amplitudou.

Pomocí použité myšlenky jsme vlastně na desce již zavedli jednu kartézskou souřadnici x a stejným způsobem měřme v kolmém směru souřadnici y. Výchylka vlny, kterou jsme zatím nalezli, má tak v každém okamžiku harmonický průběh po ose x a je konstantní podél osy y. Pouhým natočením pohledu samozřejmě můžeme stejný postup opakovat s prohozenými osami. Klíčovým krokem je ale celkem nepřekvapující fakt, že existují i stojaté vlny s harmonickým průběhem výchylky po obou osách současně. Zde budeme muset bez vysvětlování přijmout platnost tvrzení, že počty uzlů podél os x a y mohou být dvě různá čísla m a n, tedy vlna je popsána funkcí

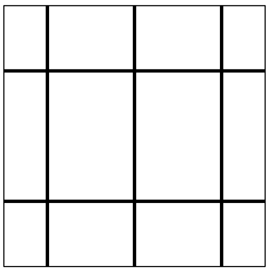
$$z(x, y, t) = A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

a platí pro ni

$$\omega = \frac{\pi c}{a} \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Čísla m a n volíme opět z oboru $\mathbb{N}_0$. Všimněte si, že zvolíme-li některé z nich rovné 0, oba vzorce se skutečně zjednoduší na dříve probrané případy.

Tento vzorec je již poněkud užitečnější, ale neumožňuje další logické variace. Podle něj by každý Chladniho obrazec muset vypadat podobně stroze jako obr. 3, což neodpovídá pozorování. Narazili jsme tedy na slepou cestu?



Obr. 3

Vzniklý problém nám pomůže vyřešit známý princip superpozice, který říká, že různé takovéto vlny mohou na desce existovat současně a nezávisle na sobě a okamžitou výchylku v každém bodě pak můžeme spočítat jako součet hodnot, které by nám daly vzorce každé z nich. Na struně se takto mohou sčítat příspěvky jednotlivých harmonických kmitočtů, ale vzniklé vlnění přestane být stojaté – výsledný vzorec by neumožňoval vytknutí časového členu. Aby tato podmínka nebyla porušena, musely by všechny sčítané vlny obsahovat stejný činitel $\sin(\omega t + \varphi_0)$, tedy mít stejnou frekvenci a ještě být ve fázi.

To nám v případě struny nedá žádné nové možnosti, protože i zbytek vzorce pro stojatou vlnu až na amplitudu je hodnotou ω jednoznačně určen, a mohli bychom tak sčítat nejvýše amplitudy stejné vlny.

Vzpomeneme-li si ovšem zde na trvzení, že $\omega = \frac{\pi c}{a}\sqrt{m^2+n^2}$, vidíme, že jednoznačnost přestává na desce platit – odlišnou vlnu se stejným kmitočtem můžeme získat, nahradíme-li uspořádanou dvojici (m,n) jinou dvojicí (m',n'), pro kterou by platilo $m^2+n^2 = m'^2+n'^2$. Celkem okamžitým řešením je čísla ve dvojici prohodit. Pro dostatečně malá čísla m a n je to dokonce jediné, co můžeme udělat – první méně triviální rovnost je $3^2+4^2 = 5^2+0^2$. Stejně jako u kmitání struny se ale spokojíme spíše s menšími hodnotami a budeme brát v úvahu jen vlny určené dvojicemi (m,n) a (n,m). (V případě $m = n$ se nic špatného neděje, jen se tento krok stane zbytečným.) Tak můžeme vytvářet stojaté vlny konečného tvaru

$$z(x,y,t) = \left(A_1 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a} + A_2\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a}\right)\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Použití vzorce

Chladniho obrazce skutečně již budeme počítat jako uzlové čáry takto vzniklých vln, tedy množiny bodů $[x,y]$, které splňují rovnici

$$A_1 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a} + A_2\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a} = 0$$

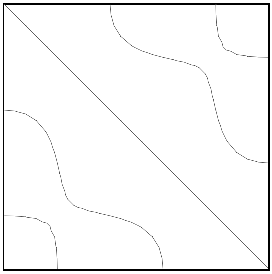
pro nějaké hodnoty $m,n \in \mathbb{N}_0$ a $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$.

Tím je sice popsána křivka, ale tvar její (neparametrické) rovnice je pro větší m a n příliš složitý pro analytické řešení, navíc je takový postup zdlouhavý. Chladniho obrazce tedy budeme vykreslovat numericky pomocí počítače. Máme v podstatě dvě možnosti, jak tento úkol počítači sdělit: použít matematický software (Mathematica, Maple apod.) nebo napsat vlastní jednoúčelový program.

První z možností je podstatně snazší, ale závisí na dostupnosti software, který obecně není volně šiřitelný. Různé programy mají také různé možnosti, jimiž jsme vázáni. Příklad vyřešíme pomocí programu Maple, protože jeho příkaz `implicitplot` je přesně to, co hledáme (obr. 4):

```
# Parametry zvolíme náhodně:
m := rand(5)(): n := rand(5)():
a1 := rand(-5..5)(): a2 := rand(-5..5)():
f := (x,y) -> a1*cos(m*x)*cos(n*y) + a2*cos(n*x)*cos(m*y):
plots[implicitplot](
```

```
  f(x,y) = 0,    x=0..Pi, y=0..Pi,
  scaling=constrained, view=[0..Pi,0..Pi], axes=none);
```



Obr. 4

Jestliže se rozhodneme pro programování, nebudeme potřebovat umět vykreslovat takto zadané křivky. Mnohem výhodnější je vyrobit si čtvercovou mřížku bodů o souřadnicích z rozmezí $\langle 0, a\rangle$ a každému z nich přiřadit barvu dle jeho amplitudy. V nejjednodušším případě budeme body vybarvovat bíle nebo černě podle toho, zda absolutní hodnota tohoto výsledku bude menší nebo větší než jistá hranice.

Zadání si můžeme pro své účely ještě mírně upravit: využijeme toho, že pro tvar křivky nejsou rozhodující obě hodnoty A_1 a A_2, ale jen jejich poměr. Mohli bychom tak ušetřit jeden parametr. Všech možných „poměrů" například dosáhneme, zvolíme-li

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \cos\psi \\
A_2 &= \sin\psi,
\end{aligned}
$$

kde ψ je pomocná hodnota bez hlubšího geometrického významu.

Přesně podle posledních dvou odstavců postupuje následující program. Pro ukázku jsme použili programovací jazyk Pascal, protože je rozšířen v osnovách středních škol.

```
program Chladni;
uses Graph;

var grDriver,grMode,grErr:Integer;
    m,n,psi:Integer;         { Parametry obrazce }
    a1,a2:Real;
```

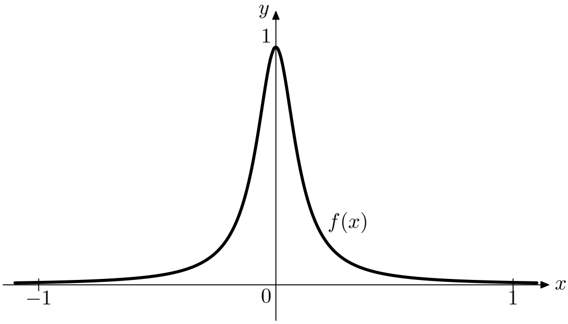
```
    x,y:Integer;                { Souřadnice }
const a=200;                    { Strana čtverce v počtu bodů }
      pi=3.1415927;

begin
  Write('Zadejte m: '); ReadLn(m);
  Write('Zadejte n: '); ReadLn(n);
  Write('Zadejte parametr psi: '); ReadLn(psi);
  a1 := cos(psi*pi/180);      { Výpočet A1 a A2 z psi }
  a2 := sin(psi*pi/180);
  grDriver := Detect;
{ Následující řádek upravte dle skutečného
podadresáře "BGI" své instalace }
  InitGraph(grDriver, grMode, 'C:\Pascal\BGI');
  grErr := GraphResult;
  if grErr = grOK then begin
    for x := 0 to a do          { Procházení bod po bodu }
      for y := 0 to a do
{ Blízkost nuly poznáme podle absolutní hodnoty }
        if abs(a1*cos(m*pi*x/a)*cos(n*pi*y/a) +
               a2*cos(n*pi*x/a)*cos(m*pi*y/a))<0.1
          then PutPixel(x,y,0)           { Blízko nuly: černá }
          else PutPixel(x,y,GetMaxColor);    { Dále: bílá }
    ReadLn;
    CloseGraph;
  end else
    WriteLn('Chyba grafiky: ',GraphErrorMsg(grErr));
end.
```

Čtenáři zběhlejší v programování pak možná rádi vyzkouší jedno silné vylepšení programu – přechod od dvou barev k plynulým přechodům stupňů šedi. Příklad uvádět nebudeme, protože v Pascalu by se jednalo o příliš velké změny. Myšlenkou je nevyužít vypočítanou hodnotu pouze k rozhodnutí pro černou nebo bílou, ale přímo jí přiřadit barvu. Chladniho obrazce vzniknou, pokud zvolíme takové obarvení, aby se hodnoty blízké 0 značně odlišovaly od ostatních. Takovým zobrazením do množiny $\langle 0, 1\rangle$ (bílá – černá) může být například jednoduchá funkce

$$f(x) = \frac{1}{1 + nx^2},$$

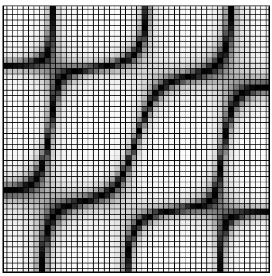
kde n je koeficient v řádu desítek až stovek. Její graf ukazuje obr. 5. Jestliže chceme, aby černé barvě odpovídala hodnota 0, jak je obvyklé na počítači, odečteme hodnotu funkce f od 1.



Obr. 5

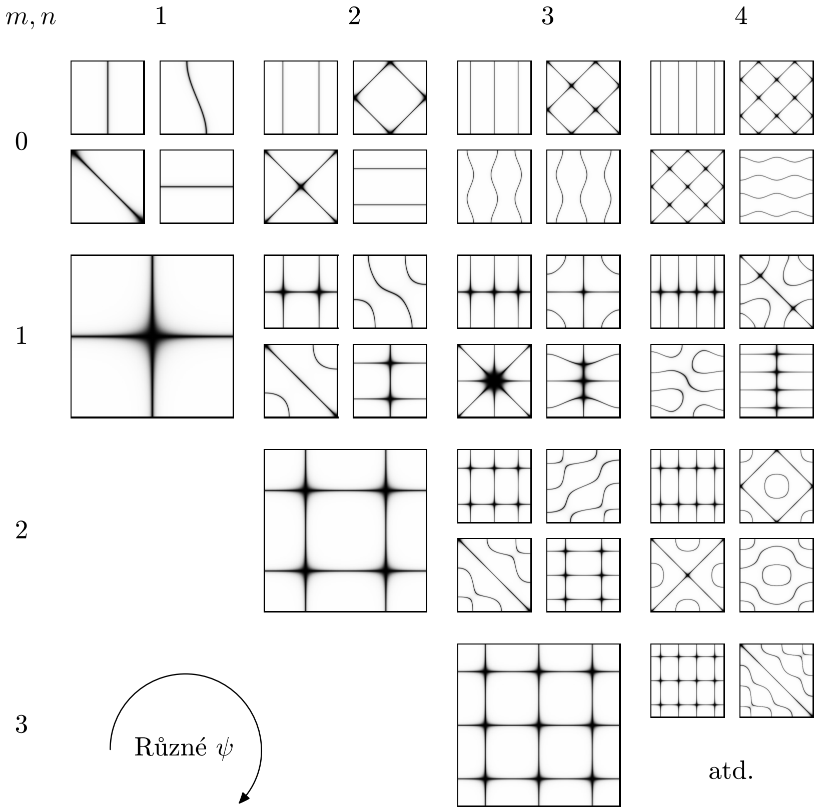
Ukážeme zde alespoň, jak je možno tento úkol zadat programu Maple. Výsledkem je obr. 6.

```
m := rand(5)(): n := rand(5)():
phi := rand(360)():
a1 := cos(phi*Pi/180): a2 := sin(phi*Pi/180):
f := (x,y) -> a1*cos(m*x)*cos(n*y) + a2*cos(n*x)*cos(m*y):
plots[densityplot](
 1-1/(100*f(x,y)^2+1),   x=0..Pi, y=0..Pi,
 grid=[50,50], axes=none,
 scaling=constrained, view=[0..Pi,0..Pi]);
```



Obr. 6

Vlastním programem dosáhneme poněkud lepších obrázků, které vidíme na obr. 7. Programátoři si pak jako další výzvu mohou vzít plynulé změny parametru ψ (jediného, který je možno měnit spojitě), čímž vzniknou zajímavé animované přechody mezi různými obrazci ... a dále se fantazii meze nekladou.

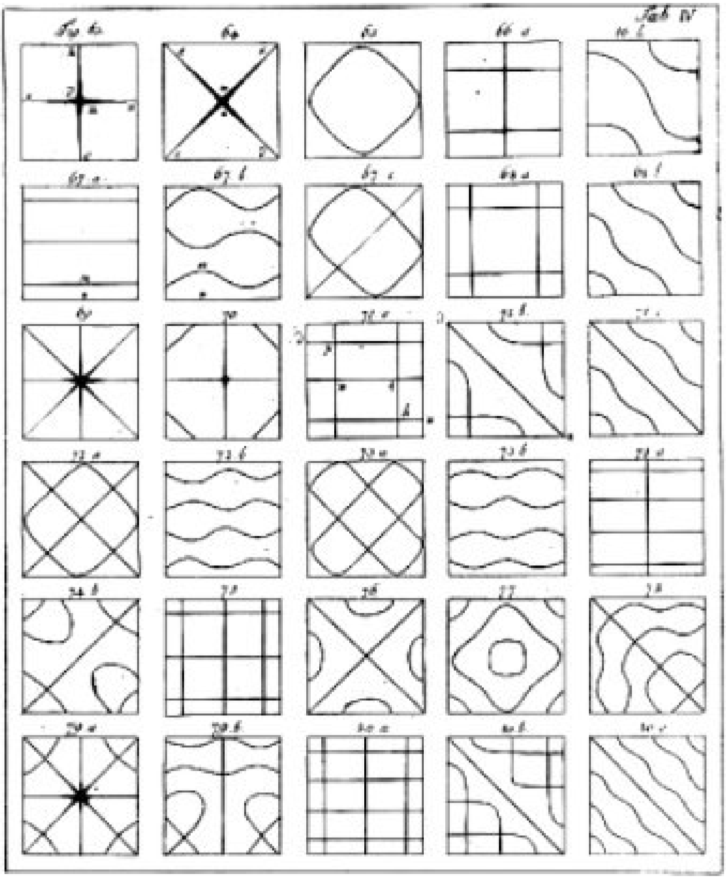


Obr. 7

Výsledné obrázky

Obrazce tvořící obr. 7 byly vytvořeny pomocí algoritmu popsaného výše. V tabulce jsou uvedeny i použité hodnoty parametrů, pomocí kterých je možné hledat různé zákonitosti nebo si obrázky znovu nakreslit.

Nakonec na obr. 8 je kopie původních Chladniho nákresků (tedy vycházejících ze skutečné situace), aby bylo možno říci, zda nás naše úvahy dovedly až k cíli.



Obr. 8

* * * * *

Matematika je veda o vzoroch a príroda využíva takmer každý vzor, ktorý je k dispozícii ... Funkciou matematiky je usporadúvať základné vzory a pravidelnosti tým najuspokojivejším spôsobom.

Ian Stewart: Čísla prírody. Bratislava: Archa 1996