Martina Jarošová

Zajímavosti o Fibonacciových číslech

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 2, 7–15

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146192`

Zajímavosti o Fibonacciových číslech

Martina Jarošová, PřF MU Brno

Cílem tohoto článku je poukázat na některé zajímavosti o Fibonacciových číslech. Nejprve ale několik slov o samotném Fibonaccim.

Fibonacci

Leonardo Pisánský – Fibonacci, též Leonardo z Pisy (také Filius Bonacci, tj. syn Bonacciův) je jedním z nejvýznamnějších matematiků středověké Evropy (obr. 1 až 3). Narodil se v Pise kolem roku 1170 a zemřel zřejmě roku 1250. Jeho otcem byl Guiliemo Bonacci, pracoval jako městský úředník. Leonardo studoval matematiku v Bougii, jedné z obchodních kolonií Pisy v severní Africe. Své znalosti si později rozšiřoval při cestách za obchodem ve Středomoří a v Orientu. Z jeho spisů je nejznámější *Liber abaci* (Kniha o abaku) z roku 1202.

Obr 1: Fibonacci

Obr 2: Socha v Pise

Obr 3: Pisa

Velmi známá je posloupnost Fibonacciových čísel $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, která začíná hodnotami $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a splňuje rekurentní formuli

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{pro všechna přirozená čísla } n = 1, 2, 3, \dots \qquad (1)$$

Několik prvních členů Fibonacciovy posloupnosti je

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

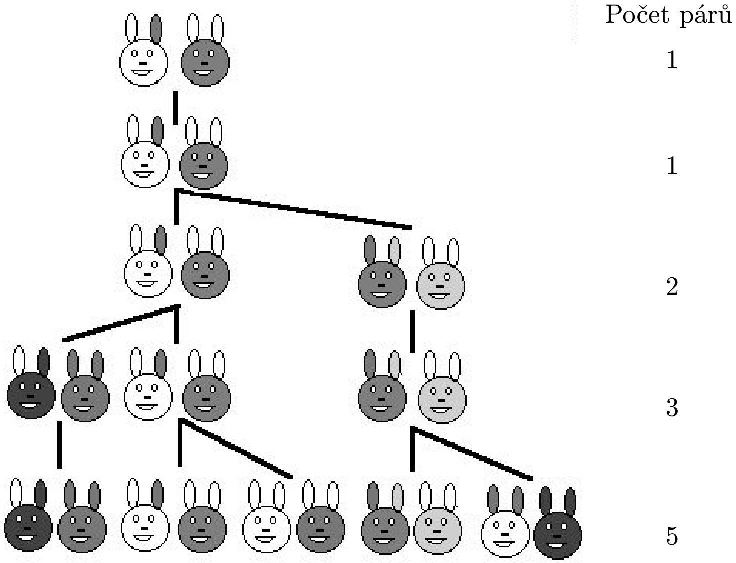
Tato čísla se poprvé objevila ve druhém vydání knihy Liber abaci z roku 1228 uvedením úlohy o králících, a proto nesou jeho jméno.

Fibonacciovi králíci

Původní Fibonacciův problém, který zkoumal, zní: „Jak rychle se mohou množit králíci za ideálních podmínek?“

Předpokládejme, že nově narozený pár (1 samec a 1 samice) je vložen do ohrady. Králíci jsou schopni pářit se (dospějí) ve věku jednoho měsíce a na konci druhého měsíce může samice porodit nový pár králíků. Přitom se předpokládá, že naši králíci nikdy neumírají, nikdy nejsou nemocní a že dospělá samice porodí každý měsíc vždy jen jednoho samce a jednu samici.

Fibonacci si položil následující otázku: „Kolik párů králíků bude v ohradě po jednom roce?“ Postupně můžeme počítat (obr. 4):



Obr. 4: Fibonacciovi králíci

- na konci 1. měsíce se již mohou pářit, ale v ohradě je stále 1 pár
- na konci 2. měsíce samice porodí nový pár, tedy v ohradě máme 2 páry králíků

- na konci 3. měsíce původní samice porodí druhý nový pár, v ohradě jsou nyní 3 páry králíků
- na konci 4. měsíce původní pár zplodí další nový pár, a také samice narozená druhý měsíc porodí svůj první pár potomků, tedy v ohradě je nyní 5 párů králíků

Počty párů králíků na začátku každého měsíce jsou

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Každý měsíc je počet párů roven součtu počtu párů v předminulém měsíci a počtu párů v minulém měsíci. Získáváme Fibonacciovu posloupnost.

Abstraktní model

Uvažme nyní abstraktní matematický model popisující tyto biologické skutečnosti. Mějme jakýsi ideální vzorek A_0 s následujícími dvěma vlastnostmi:

i) Ve stejných časových intervalech, tedy v čase $t_1, t_2, \ldots$, kde

$$t_{i+1} - t_i = \tau, \qquad \text{pro } i \geq 1,$$

vzorek A_0 generuje nové vzorky $A_1, A_2, \ldots$ Vzorek A_1 je tedy vygenerován vzorkem A_0 v čase t_1, vzorek A_2 v čase $t_2, \ldots$

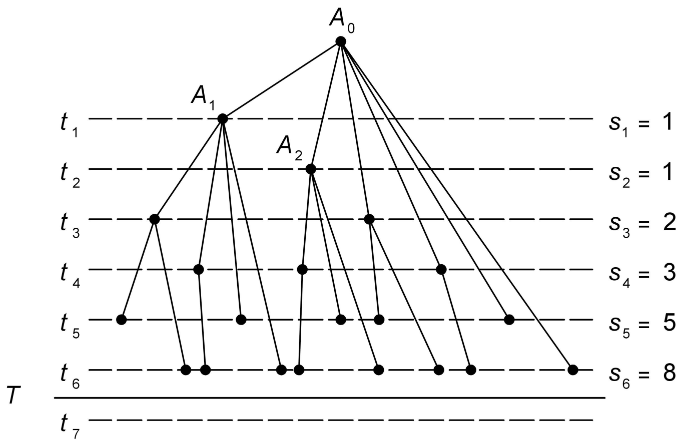
ii) Každý jedinec $A_1, A_2, \ldots$ se po svém vygenerování stává „dospělým“ po čase 2τ a začíná též generovat nové vzorky ve stejném časovém intervalu τ jako A_0. „Období dospívání“ jakékoliv nové generace je rovno 2τ.

Označme nyní s_n počet jedinců, kteří jsou vygenerováni ve stejný časový okamžik t_n. Snadno je vidět, že

$$s_n = s_{n-2} + s_{n-1}, \qquad \text{pro } n \geq 3,$$

kde s_{n-1} je počet dospělých vzorků v generačním okamžiku t_{n-1}, s_{n-2} je počet vzorků vygenerovaných v čase $t_{n-2} = t_n - 2\tau$, tj. počet vzorků, které se právě stávají dospělými. Ale $s_1 = s_2 = 1$, a proto čísla $s_1, s_2, s_3, \ldots$ jsou právě Fibonacciova čísla.

Abstraktní model potomstva vzorku A_0 je znázorněn na obr. 5. Vzorky vygenerované ve stejný časový okamžik t_n jsou umístěny na stejné horizontále. Vzorek A_0 je umístěn nad první řádek.



Obr. 5: Abstraktní model

Fibonacci a květiny

Počet okvětních lístků pro velké množství květin odpovídá právě Fibonacciovým číslům (obr. 6 až 8):

Obr 6: Trillium

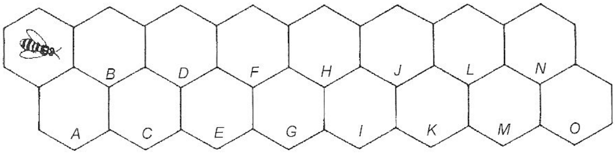
Obr 7: Celandine

Obr 8: Divoká růže

Samozřejmě existují výjimky, kdy se počet okvětních lístků Fibonacciovým číslům nerovná, např. fuchsie (4 okvětní lístky).

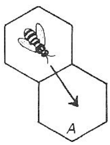
Fibonacci a včely

Uvažme dvě přilehlé řady buněk v nekonečném úlu, jak ukazuje obr. 9. Pokusme se nalézt počet cest, kterými může včela lézt z jedné buňky do jiné buňky skrz ostatní buňky, jestliže může lézt jedině vpravo nebo šikmo vpravo dolů nebo šikmo vpravo nahoru.

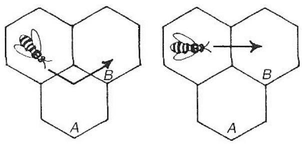


Obr. 9: Dvě přilehlé řady buněk

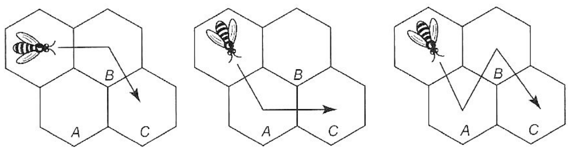
Nechť b_n označuje počet cest k n-té buňce. Potom tedy existuje právě jedna cesta k buňce A (obr. 10), tedy $b_1 = 1$. Do buňky B vedou dvě odlišné cesty (obr. 11), tedy $b_2 = 2$. K buňce C se včela může dostat třemi různými cestami (obr. 12), tedy $b_3 = 3$. Dále existuje pět rozdílných cest, kterými se včela může uchýlit do buňky D, jak je patrné z obr. 13. Proto $b_4 = 5$, podobně $b_5 = 8$.



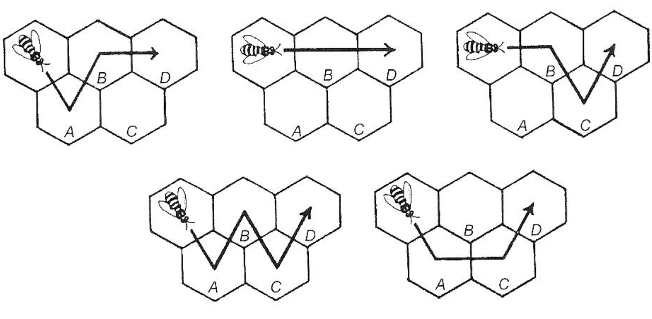
Obr 10: Cesta do buňky A



Obr 11: Cesta do buňky B



Obr 12: Cesta do buňky C



Obr 13: Cesty do buňky D

Model postupného vývoje je zřejmý z následující tabulky.

n	1	2	3	4	5	$\dots$	n
b_n	1	2	3	5	8	$\dots$	?

Z toho induktivně vyplývá, že pro včelu lezoucí do buňky n existuje $b_n = F_{n+1}$ odlišných cest, kde F_{n+1} značí $(n+1)$-ní Fibonacciovo číslo.

Základní vlastnosti Fibonacciových čísel

1. Začněme výpočtem součtu prvních n Fibonacciových čísel. Tedy dokažme, že platí

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{2}$$

Důkaz: Užitím Fibonacciovy rekurentní formule (1) získáváme

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2, \\ F_2 &= F_4 - F_3, \\ F_3 &= F_5 - F_4, \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n, \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}. \end{aligned}$$

Součtem všech těchto rovnic dostáváme

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

2. Dále ukažme, že součet prvních n Fibonacciových čísel s lichými indexy je roven

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}. \tag{3}$$

Důkaz: Opět použijeme Fibonacciovu rekurentní formuli (1). Platí

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2, \\ F_3 &= F_4 - F_2, \\ &\vdots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

Požadovaný výsledek získáme opět součtem všech těchto rovností.

3. Součet prvních n Fibonacciových čísel se sudými indexy je roven

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Důkaz: Vycházíme z následujícího: Z (2) plyne

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1.$$

Odečtením (3) od této rovnosti obdržíme

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n} = F_{2n+1} - 1,$$

jak bylo požadováno.

4. Ukážeme též, že platí rovnost

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}. \tag{4}$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme matematickou indukcí:
1. Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť $F_1^2 = 1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2$.
2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$ ($n \geq 2$). Indukčním předpokladem je tedy rovnost

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_{n-1}^2 = F_{n-1} F_n.$$

Nyní dokažme platnost tvrzení pro n. K oběma stranám indukčního předpokladu přičtěme F_n^2:

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_{n-1}^2 + F_n^2 &= F_{n-1} F_n + F_n^2 \\ &= F_n(F_{n-1} + F_n) = F_n F_{n+1} \end{aligned}$$

Užili jsme Fibonacciovu rekurentní formuli (1) a dokázali, že tvrzení (4) platí pro každé přirozené číslo n.

V roce 1680 francouzský matematik a astronom italského původu G. D. Cassini zjistil, že platí identita (viz [3])

$$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad \text{pro } n \geq 1. \tag{5}$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme matematickou indukcí, přičemž

$$F_0 = F_2 - F_1 = 0.$$

1. Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť $F_2F_0 - F_1^2 = -1^2 = -1 = (-1)^1$.
2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n. Indukčním předpokladem je tedy rovnost:
$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}.$$
Nyní dokažme platnost tvrzení pro $n + 1$. K oběma stranám indukčního předpokladu přičtěme F_nF_{n+1}:
$$\begin{aligned} F_n^2 + F_nF_{n+1} &= F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1} \\ F_n(F_n + F_{n+1}) &= F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) + (-1)^{n-1} \\ F_nF_{n+2} &= F_{n+1}^2 + (-1)^{n-1} \\ F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

V úpravách jsme opět použili Fibonacciovu rekurentní formuli (1) a tím dokázali, že tvrzení (5) platí pro každé přirozené číslo n.

Další Fibonacciovy identity

Pro každá přirozená čísla m, n platí:

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 + F_3 - \cdots - F_{2n} + F_{2n+1} &= 1 + F_{2n} \\ F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} &= F_{2n}^2 \\ nF_1 + (n-1)F_2 + (n-2)F_3 + \cdots + 2F_{n-1} + F_n &= F_{n+4} - (n+3) \\ F_n^4 - F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} &= 1 \\ F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n &= F_{2n+1} \\ F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} &= (-1)^n \\ F_{n+1}^2 + F_n^2 &= F_{2n+1} \\ F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 &= F_{3n} \\ F_{n+1}^2 - F_n^2 &= F_{n-1}F_{n+2} \\ F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n &= F_{2n} \\ F_mF_n + F_{m+1}F_{n+1} &= F_{m+n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Většinu těchto rovností lze snadno dokázat pomocí matematické indukce. Existuje mnoho dalších zajímavých vztahů a poutavých skutečností, ale o nich se zmíníme někdy příště.

Literatura

[1] Bečvář, J.: *Leonardo Pisanský – Fibonacci.* Dějiny matematiky, sv. 19, 2001, 264–339.
[2] Hoggatt, V. E. Jr.: *Fibonacci and Lucas Numbers.* Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.
[3] Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
[4] Knott, R.: *Fibonacci Numbers and Nature.* [online] c1996–2006, posl. rev. 19. 10. 2005 [cit. 12. 7. 2006] `http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html`
[5] Vorobiev, N. N.: *Fibonacci Numbers.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
[6] Zylinski, E.: *Numbers of Fibonacci in Biological Statistics.* Atti del Congr. internaz. matematici 4 (1928), 153–156.

* * * * *

ZAUJÍMAVÁ POSTUPNOSŤ Z CHAOSU K PORIADKU

Asi budete mať problém, ak by ste mali určiť hneď ľubovoľný, t.j. n-tý člen (napr. stý člen) postupnosti $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, ktorú francúzsky matematik E. Lucas (1842–1891) pomenoval na Fibonacciho postupnosť.*) Ak chcete priamo určovať n-tý člen Fibonacciho postupnosti, tu je hľadaný vzorec (objavený až v 19. storočí):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Pomer dvoch po sebe nasledujúcich členov tejto postupnosti sa s rastúcim n stále viac približuje tzv. pomeru zlatého rezu. Nečakanou skutočnosťou je, že aj pri skúmaní štruktúr prírodných telies i niektorých biologických javov sa ukazuje Fibonacciho postupnosť i pomer zlatého rezu. Ako keby boli symbolom vzniku poriadku z chaosu.

Dušan Jedinák

*) Leonardo Pisánsky (asi 1170–1240), prezývaný Fibonacci (syn dobráka), vo svojom diele *Liber abaci* zaviedol do Európy indické cifry a nulu, vysvetlil desiatkovú pozičnú sústavu i arabské poznatky z aritmetiky aj algebry.