Miroslava Jarešová

Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s hyperbolou

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 1, 13–21

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146183`

Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s hyperbolou

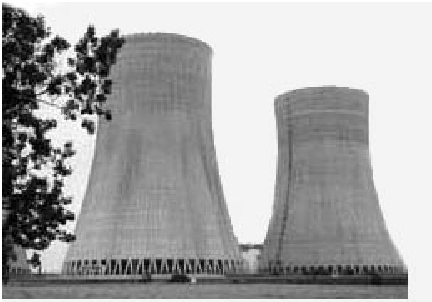
Miroslava Jarešová, PedF UHK Hradec Králové

V již uveřejněných článcích této série jsme se zabývali parabolami, kružnicemi a elipsami. Zbývá poslední typ kuželoseček – hyperboly. Opět ukážeme řešení tří náročnějších úloh.

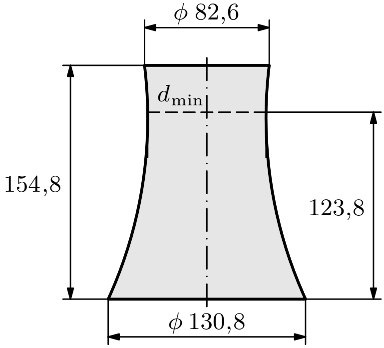
V první úloze zopakujeme základní poznatky z analytické geometrie hyperboly.

1. Chladicí věž jaderné elektrárny Temelín

Chladicí věže elektráren mají obvykle tvar částí jednodílných rotačních hyperboloidů, jak je znázorněno na obr. 1. V případě jaderné elektrárny Temelín má chladicí věž výšku 154,8 m, průměr v koruně věže je 82,6 m, patní průměr je 130,8 m. Nejmenší průměr má věž ve výšce 123,8 m (obr. 2). Ve vhodné kartézské soustavě souřadnic napište rovnici hyperboly (ve středovém tvaru), jejímž otáčením kolem vedlejší osy vznikne rotační hyperboloid temelínské chladicí věže. Určete také minimální hodnotu průměru $d_{\min}$ této chladicí věže.



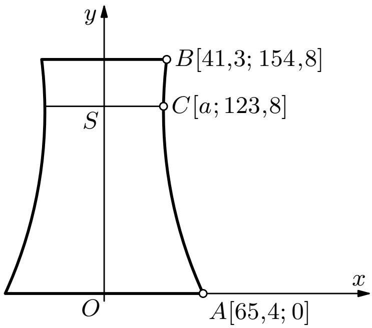
Obr. 1



Obr. 2

Řešení

Uvažujme kartézskou soustavu souřadnic Oxy z obr. 3, v němž je zakreslena část hyperboly, jejíž rotací kolem osy y vznikne „plášť“ uvažované chladicí věže. Aby byly obrázky i výpočty jednoduché a přehledné, uvádíme v nich pouze číselné hodnoty rozměrů – vždy v metrech.



Obr. 3

Středová rovnice hyperboly, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou x a vedlejší osa s osou y, má tvar

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

kde m, n jsou souřadnice středu hyperboly, a délka její hlavní poloosy a b délka vedlejší poloosy. Z obr. 3 je vidět, že pro uvažovanou hyperbolu platí $m = 0$, $n = 123{,}8$. Její středová rovnice má tedy tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-123{,}8)^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Z podmínek, že body A, B leží na naší hyperbole, dostaneme soustavu rovnic s neznámými a, b:

$$\frac{65{,}4^2}{a^2} - \frac{(0-123{,}8)^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

$$\frac{41{,}3^2}{a^2} - \frac{(154{,}8-123{,}8)^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

Jestliže v soustavě (2), (3) zavedeme substituci

$$t = \frac{1}{a^2}\,, \quad u = \frac{1}{b^2}\,, \tag{4}$$

obdržíme soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými t, u:

$$65{,}4^2 \cdot t - 123{,}8^2 \cdot u = 1$$
$$41{,}3^2 \cdot t - 31{,}0^2 \cdot u = 1$$

Vyřešením této soustavy dostaneme

$$t \doteq 6{,}520\,32 \cdot 10^{-4}, \quad u \doteq 1{,}167\,16 \cdot 10^{-4},$$

z čehož vypočteme

$$a = \sqrt{\frac{1}{t}} \doteq 39{,}16, \quad b = \sqrt{\frac{1}{u}} \doteq 92{,}56.$$

Středová rovnice uvažované hyperboly ve zvolené soustavě souřadnic je tedy rovnice (1), v níž $a \doteq 39{,}16$, $b \doteq 92{,}56$.

Protože $d_{\min} = 2a \doteq 78{,}3$, dosahuje temelínská chladicí věž nejmenšího průměru přibližně 78,3 m.

Druhá úloha se týká děje v ideálním plynu. V části b) ukážeme situaci, kterou nelze řešit prostředky elementární matematiky, ale je nutné použít diferenciální počet.

2. Úloha o ideálním plynu

Hélium o látkovém množství 1 mol je uzavřeno pod válcovým pístem a velmi pomalu přechází ze stavu 1 (tlak $p_1 = 0{,}4$ MPa, objem $V_1 = 6$ l) do stavu 2 (tlak $p_2 = 4p_1$, objem $V_2 = \frac{1}{3}V_1$). Určete, jaké největší teploty plyn při tomto ději dosáhne, jestliže grafem závislosti tlaku plynu na jeho objemu je

a) část přímky (obr. 4),

b) část paraboly, jejíž vrchol leží na ose V (obr. 5).

Řešení

Připomeňme stavovou rovnici ideálního plynu

$$pV = nRT, \tag{5}$$

v níž p je tlak plynu, V jeho objem, T jeho teplota, n látkové množství plynu a

$$R \doteq 8{,}314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \tag{6}$$

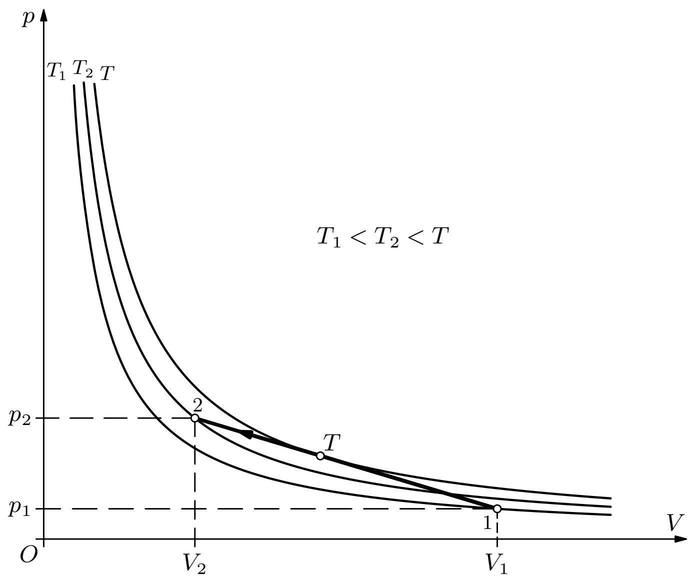
je molární plynová konstanta. Jestliže do (5) dosadíme ze zadání $n = 1$ mol, obdržíme

$$pV = RT, \tag{7}$$

což jsou pro různá konstantní T rovnice izoterm – hyperbol (obr. 4, 5).

Čím vyšší je teplota plynu, tím dále od počátku soustavy souřadnic je vrchol odpovídající hyperboly. Abychom se vyhnuli problémům s jednotkami, budeme v (7) i v následujících výpočtech považovat symboly p, V, R, T atd. za číselné hodnoty jednotlivých veličin – vždy v základních jednotkách.

a) V tomto případě dosáhne plyn v průběhu děje 1–2 takové nejvyšší teploty, pro kterou se příslušná hyperbola dotýká přímky 1–2 (obr. 4).



Obr. 4

Bod o souřadnicích V, p odpovídající maximální teplotě T leží jak na hyperbole o rovnici (7), tak i na přímce 1–2, jejíž rovnice má tvar

$$p = aV + b, \tag{8}$$

kde a, b jsou konstanty, které určíme později. Přímka (8) je tečnou hyperboly (7), jestliže soustava rovnic (7), (8) s neznámými p, V má právě jedno řešení. Dosadíme-li p z rovnice (7) do rovnice (8), dostaneme kvadratickou rovnici pro V:

$$aV^2 + bV - RT = 0$$

Aby soustava (7), (8) měla právě jedno řešení, musí být diskriminant této kvadratické rovnice roven nule, tj.

$$b^2 + 4aRT = 0.$$

Vyjádříme-li odtud T, dostaneme

$$T = -\frac{b^2}{4aR}\,. \tag{9}$$

V tomto vztahu pro nejvyšší teplotu T zatím neznáme hodnoty konstant a, b. Protože přímka (8) prochází body popisujícími stavy 1 a 2, platí

$$p_1 = aV_1 + b,$$
$$p_2 = aV_2 + b.$$

Vyřešíme-li tuto soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých a, b, přičemž si uvědomíme, že podle zadání platí $p_2 = 4p_1$, $V_2 = \frac{1}{3}V_1$, dostaneme

$$a = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2} = \frac{p_1 - 4p_1}{V_1 - \frac{1}{3}V_1} = -\frac{9p_1}{2V_1}\,,$$

$$b = \frac{p_2V_1 - p_1V_2}{V_1 - V_2} = \frac{4p_1 \cdot V_1 - p_1 \cdot \frac{1}{3}V_1}{V_1 - \frac{1}{3}V_1} = \frac{11p_1}{2}\,.$$

Dosadíme-li odtud za konstanty a a b do vztahu (9), a potom za p_1, V_1 a R dosadíme číselné hodnoty ze zadání a z (6), vypočteme

$$T = \frac{121p_1V_1}{72R} \doteq \frac{121 \cdot \left(0{,}4 \cdot 10^6\right) \cdot \left(6 \cdot 10^{-3}\right)}{72 \cdot 8{,}314} \doteq 485.$$

Zjistili jsme, že plyn při zkoumaném ději dosáhne nejvyšší teploty asi 485 K.

b) Vrcholová rovnice paraboly na obr. 5 je dána vztahem

$$(p - 0)^2 = -2c(V - m),$$

tj.

$$p^2 = -2c(V - m), \tag{10}$$

kde m, 0 jsou souřadnice vrcholu této paraboly a c její parametr.

Protože parabola (10) prochází body popisujícími stavy 1 a 2, platí

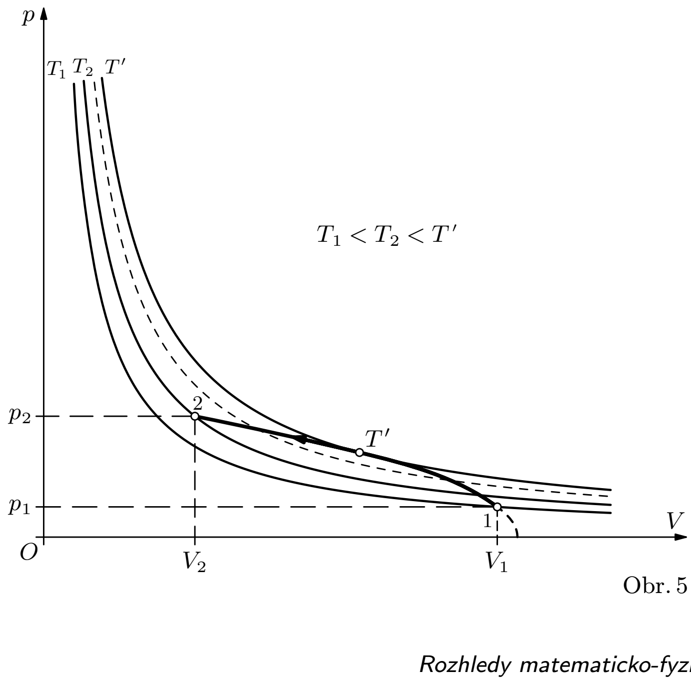
$$p_1^2 = -2c(V_1 - m),$$
$$p_2^2 = -2c(V_2 - m).$$

Vyřešíme-li tuto soustavu rovnic o dvou neznámých m, c, přičemž si uvědomíme, že podle zadání platí $p_2 = 4p_1$, $V_2 = \frac{1}{3}V_1$, dostaneme

$$m = \frac{V_1 p_2^2 - V_2 p_1^2}{p_2^2 - p_1^2} = \frac{V_1 \cdot 16p_1^2 - \frac{1}{3}V_1 \cdot p_1^2}{16p_1^2 - p_1^2} = \frac{47V_1}{45},$$
$$c = -\frac{p_1^2}{2(V_1 - m)} = -\frac{p_1^2}{2\left(V_1 - \frac{47}{45}V_1\right)} = \frac{45p_1^2}{4V_1}\,.$$

Dosadíme-li odtud za m a c do rovnice paraboly (10), můžeme tuto rovnici po jednoduché úpravě napsat ve tvaru

$$p^2 = -\frac{45p_1^2}{2V_1} \cdot V + \frac{47p_1^2}{2}\,. \tag{11}$$



Obr. 5

Pro každé V, pro které platí $V_2 \leqq V \leqq V_1$, má parabola (11) společný bod (a to právě jeden) právě s jednou z hyperbol

$$pV = RT. \tag{12}$$

Vyjádříme nyní druhou mocninu teploty T odpovídající této hyperbole jako funkci proměnné V. Pro souřadnice V, p společného bodu a teplotu T platí (11) a zároveň (12). Jestliže z (12) vyjádříme p a dosadíme do (11), dostaneme po úpravě

$$T^2 = \frac{p_1^2}{2R^2} \cdot \left(47V^2 - \frac{45}{V_1} \cdot V^3\right). \tag{13}$$

Zajímá nás globální maximum funkce T proměnné V na intervalu $\langle V_2, V_1 \rangle$. Hledejme $V' \in \langle V_2, V_1 \rangle$, v němž má funkce T^2 daná předpisem (13) největší hodnotu na intervalu $\langle V_2, V_1 \rangle$ – pro stejné V' má největší hodnotu na zmíněném intervalu i funkce T. Vypočteme derivaci funkce T^2 proměnné V a zjistíme, ve kterém bodě intervalu (V_2, V_1) je tato derivace rovna nule:

$$\frac{\mathrm{d}T^2}{\mathrm{d}V} = \frac{p_1^2}{2R^2} \cdot \left(47 \cdot 2V - \frac{45}{V_1} \cdot 3V^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}T^2}{\mathrm{d}V} = 0 \ \wedge \ V \in (V_2, V_1) = \left(\tfrac{1}{3}V_1, V_1\right) \quad \Longleftrightarrow \quad V = \frac{47}{45} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_1$$

Pomocí druhé derivace ověříme, že funkce T^2 má ve vypočteném bodě

$$V' = \frac{47}{45} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_1 \in (V_2, V_1) \tag{14}$$

lokální maximum:

$$\frac{\mathrm{d}^2 T^2}{\mathrm{d}V^2} = \frac{p_1^2}{2R^2} \cdot \left(47 \cdot 2 - \frac{45}{V_1} \cdot 6V\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 T^2}{\mathrm{d}V^2}(V') = \frac{\mathrm{d}^2 T^2}{\mathrm{d}V^2}\left(\frac{47}{45} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_1\right) = -47 \cdot \frac{p_1^2}{R^2} < 0$$

Zjistili jsme, že funkce T^2 má na intervalu (V_2, V_1) jediný lokální extrém, a to lokální maximum v bodě V'. Protože je tato funkce spojitá na intervalu $\langle V_2, V_1\rangle$, jde dokonce o její globální maximum na intervalu $\langle V_2, V_1\rangle$. Ve stejném bodě V' má globální maximum na intervalu $\langle V_2, V_1\rangle$ také funkce T proměnné V. Hodnotu T' tohoto maxima vypočteme dosazením V' za V z (14) do (13), odmocněním a pak dosazením číselných hodnot za p_1, V_1 a R ze zadání a z (6):

$$T' = T(V') = \sqrt{T^2(V')} = \frac{2}{3}\cdot\frac{47}{45}\cdot\sqrt{\frac{47}{6}\cdot\frac{p_1V_1}{R}} \doteq$$

$$\doteq \frac{2}{3}\cdot\frac{47}{45}\cdot\sqrt{\frac{47}{6}\cdot\frac{\left(0{,}4\cdot 10^6\right)\cdot\left(6\cdot 10^{-3}\right)}{8{,}314}} \doteq 563$$

Vypočítali jsme, že plyn při tomto ději dosáhne nejvyšší teploty asi 563 K.

Porovnáme-li výsledky řešení úloh a) a b), vidíme, že $T' > T$. To je možné fyzikálně zdůvodnit např. tím, že v případě b) je nutné pro přechod plynu ze stavu 1 do stavu 2 vykonat větší práci (větší plocha pod křivkou zobrazující přechod plynu).

Ve třetí úloze se vrátíme ke gravitační potenciální energii, jíž jsme se dosti podrobně věnovali v článku [1].

3. Gravitační potenciální energie

Těleso o hmotnosti m je přemístěno z povrchu Země do vzdálenosti $r \geqq R$ od středu Země (R značí poloměr Země). Odvoďte vztah vyjadřující přírůstek gravitační potenciální energie ΔE_{pg} soustavy, která je tvořena Zemí a zmíněným tělesem, v závislosti na vzdálenosti r. Sestrojte graf funkce popisující tuto závislost.

Řešení

Ze vztahu (3) v článku [1] víme, že gravitační potenciální energie tělesa o hmotnosti m v gravitačním poli Země ve vzdálenosti r od středu Země je

$$E_{\mathrm{pg}}(r) = -\varkappa\frac{Mm}{r}\,,$$

kde M je hmotnost Země a $\varkappa$ gravitační konstanta. Přírůstek potenciální energie tělesa při jeho přemístění z povrchu Země do vzdálenosti r od jejího středu tedy je

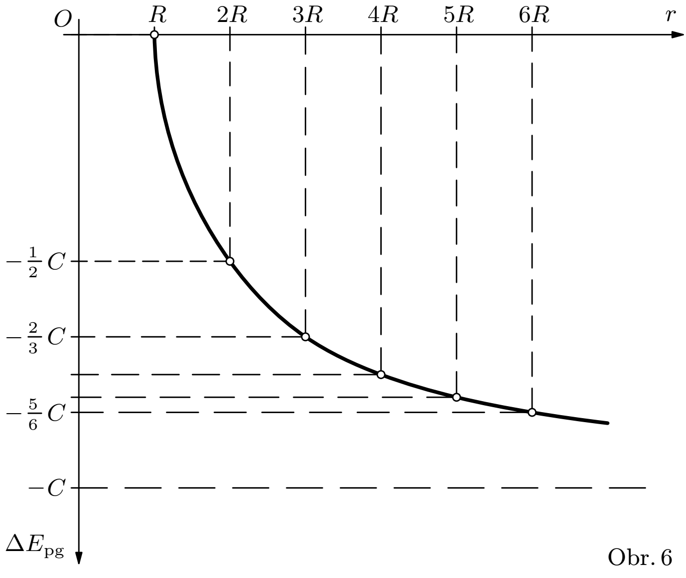
$$E_{\mathrm{pg}}(r) - E_{\mathrm{pg}}(R) = -\varkappa\frac{Mm}{r} - \left(-\varkappa\frac{Mm}{R}\right) = \varkappa\frac{Mm}{R} - \varkappa\frac{Mm}{r}\,.$$

To je současně práce vykonaná při tomto přemístění působením vnitřních sil soustavy. Gravitační potenciální energie soustavy se proto o stejnou hodnotu zmenší, tedy

$$\Delta E_{\mathrm{pg}} = -\left(\varkappa\frac{Mm}{R} - \varkappa\frac{Mm}{r}\right) = \varkappa\frac{Mm}{r} - C, \qquad (15)$$

kde jsme pro jednoduchost označili $C = \varkappa\dfrac{Mm}{R}$.

Grafem funkce ΔE_{pg} proměnné r dané předpisem (15) je část hyperboly (obr. 6).



Obr. 6

Literatura

[1] Jarešová, M., Volf, I.: *Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s elipsou.* Rozhledy MF, č. 3, roč. 81 (2006).