Jaromír Šimša

Konvexní díry v rovinných množinách bodů

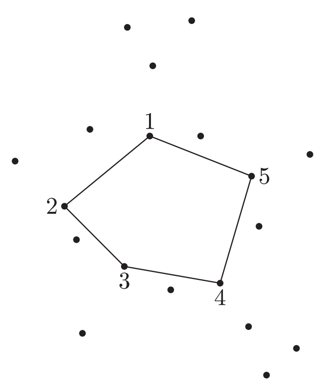
Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 4, 6–11

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146168`

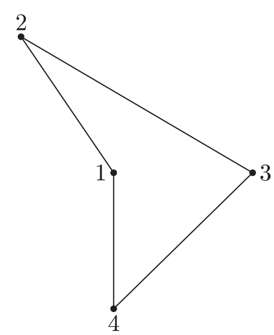
Konvexní díry v rovinných množinách bodů

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

V tomto příspěvku se můžete dočíst o jednom zajímavém a poměrně novém matematickém problému. Není starý ani tři desítky let a týká se tzv. *mnohoúhelníkových děr* v konečných množinách bodů v rovině. Tento pojem si přiblížíme pomocí obr. 1. Vidíte na něm množinu několika bodů roviny vyznačených puntíky. Body s čísly 1, 2, 3, 4 a 5 jsou vrcholy pětiúhelníkové díry v dané množině, neboť uvnitř pětiúhelníku 12345 neleží žádný bod dané množiny. Upřesněme hned, že čtyřúhelník 1234 na obr. 2 nepovažujeme za čtyřúhelníkovou díru, neboť bod 1 leží uvnitř trojúhelníku s vrcholy 2, 3 a 4. Obecně vzato, hranice díry musí vymezovat *konvexní* mnohoúhelník. S malou obměnou budeme říkat, že vrcholy díry musí být *v konvexní poloze*. Dodejme k úvodnímu vysvětlení ještě jednu důležitou podmínku, která nás bude neustále provázet: Hledají se mnohoúhelníkové díry jen v takových konečných množinách bodů, které jsou *v obecné poloze*, kdy tedy žádné tři body neleží v přímce.

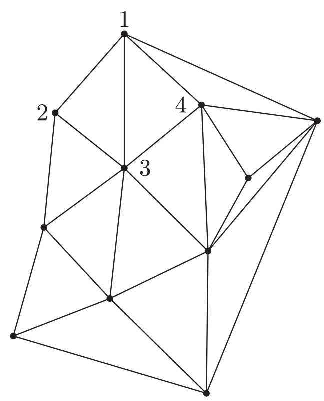


Obr. 1

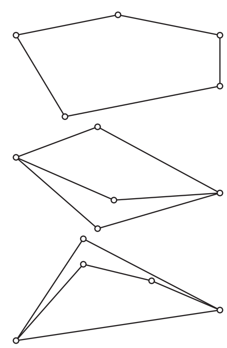


Obr. 2

Velmi zjednodušeně se dá říci, že zkoumané díry jsou tím vzácnější, čím větší počet vrcholů mají. Díry s nejmenším počtem vrcholů, totiž trojúhelníkové díry, najdeme v každé množině bodů, dokonce jimi můžeme celý „prostor“ mezi danými body zaplnit, a to postupem zvaným *triangulace*, jak ukazuje obr. 3. Spatříte na něm rovněž mnoho čtyřúhelníkových děr, například 1234. Není to překvapivé, neboť čtyřúhelníkovou díru najdeme v každé množině pěti bodů v obecné poloze. Při důkazu tohoto tvrzení stačí jen rozlišit, kolik bodů má „vnější slupka“ dané množiny*), viz tři možné situace na obr. 4. V první z nich má množina dokonce pětiúhelníkovou díru, čtyřúhelníkovou z ní dostaneme, vynecháme-li libovolný z jejích pěti vrcholů. Samozřejmě platí obecně: Odstraníme-li jakoukoliv skupinu vrcholů z mnohoúhelníkové díry dané množiny bodů, dostaneme její díru s menším počtem vrcholů, zůstanou-li alespoň tři. To je ale celkem zbytečná procedura, vždyť už jsme řekli, že vzácnější (nebo chcete-li „cennější“) jsou díry s větším počtem vrcholů. Proč je tudíž redukovat a snižovat tak jejich „hodnotu“?



Obr. 3

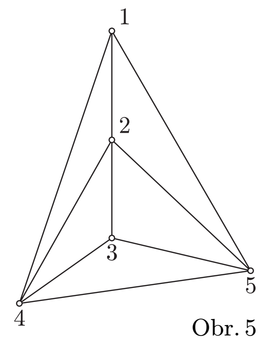


Obr. 4

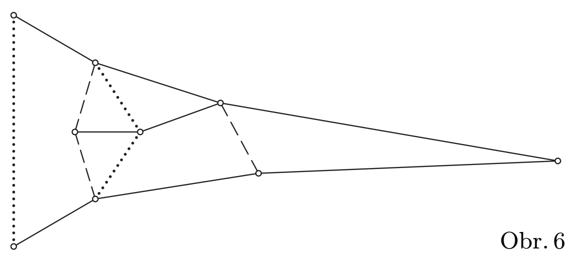
Po naznačené analýze tří možných situací z obr. 4 už není obtížné zdůvodnit, že čtyřúhelníková díra existuje rovněž v každé množině více než pěti bodů v obecné poloze. Na obr. 5 vidíte, že čtyřúhelníková díra nemusí existovat v pětici bodů, jež nejsou v obecné poloze; body označené čísly 1, 2, 3 leží v přímce. Dále už podmínku obecné polohy nebudeme zmiňovat.

*) V matematice se této *vnější slupce* říká *hranice konvexního obalu.* My budeme v dalším textu používat jednodušší a srozumitelný výraz „slupka“ již bez uvozovek.

Problém existence děr s předepsaným počtem vrcholů nastolil v roce 1978 Paul Erdös*). Ještě v témže roce dokázal profesor na univerzitě v německém Braunschweigu Heiko Harborth, že pětiúhelníková díra existuje v každé množině alespoň deseti bodů. (Můžete se o takový důkaz pokusit sami, je to úkol srovnatelný s těmi, které se v současné době zadávají na mezinárodních matematických olympiádách.) Zároveň Harborth vymyslel příklad množiny devíti bodů bez pětiúhelníkové díry (obr. 6). Podíváte-li se na obrázek pozorně, objevíte pouze dva konvexní pětiúhelníky s vrcholy v zadaných bodech. Každý z nich však obsahuje uvnitř jeden vyznačený bod, takže se nejedná o díry v dané devítibodové množině.



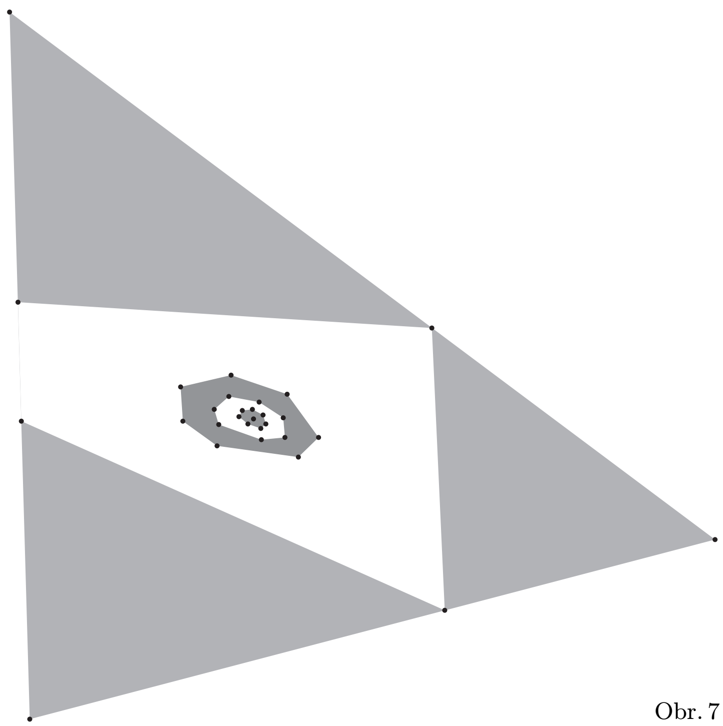
Obr. 5


Obr. 6

Asi tušíte, jak zněla obecná Erdösova otázka, na kterou dal Harborth první částečnou odpověď: Kolik nejméně bodů musí mít jakkoliv vybraná množina, aby v ní existovala k-úhelníková díra s daným počtem vrcholů k? Harborth dokázal, že pro $k = 5$ je hledaný nejmenší počet bodů roven číslu 10. O pět let později, v roce 1983, univerzitní profesor ve východokanadském New Brunswicku Joseph D. Horton překvapivě sestrojil příklady množin s libovolně velkým počtem bodů, které nemají žádnou sedmiúhelníkovou díru.

*) Světoznámý matematik (1913–1996), který jako mladý maďarský Žid utekl do světa před nacismem, nikde se však natrvalo neusadil, když celý další život strávil pracovními návštěvami jiných matematiků.

Po Hortonově objevu zůstala na více než dvě desetiletí nezodpovězena otázka, zda existují šestiúhelníkové díry ve všech dostatečně početných množinách bodů, přestože o odpověď usilovali mnozí. V roce 1980 byla objevena množina 20 bodů bez šestiúhelníkové díry, v roce 1989 množina téže vlastnosti o 26 bodech. V roce 2003 objevil univerzitní profesor v holandském Utrechtu Mark Overmars pomocí počítače několik příkladů odlišných množin 29 bodů bez šestiúhelníkové díry. Jeden příklad je znázorněn na obr. 7; kdyby puntíky měly mít kvůli rozlišení celočíselné souřadnice, potřebovali bychom k nakreslení čtverec o straně 1260 jednotek.*)

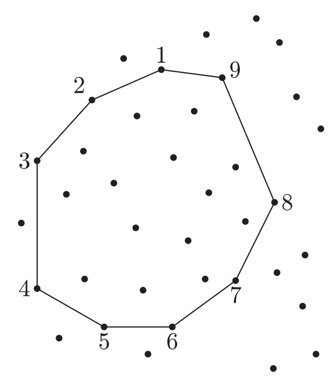


Obr. 7

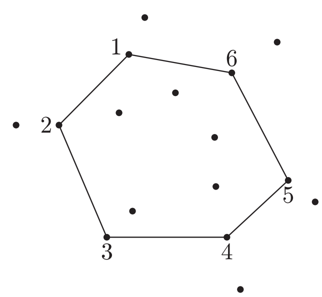
*) Kvůli malým rozměrům našeho obrázku zrakem stěží ověříme, že vnější slupkou znázorněné množiny je trojúhelník, tedy že čtyři puntíky poblíž jeho hranice jsou vnitřními body tohoto trojúhelníku. Bohužel příklad s relativně lépe rozlišitelnými body neznáme.

Jak Overmars napsal, jím sestavený program (se zabudovanými náhodnými prvky) běžel na počítači Pentium III 500 MHz nepřetržitě řadu měsíců. Vždy po několika dnech počítač ohlásil nalezení další maximální množiny bez šestiúhelníkové díry. Byly to množiny různé, ale všechny měly 29 bodů, nikdy více. Navíc tyto množiny měly společnou strukturu, jakou vidíte na obr. 7: Vnější slupkou byl vždy trojúhelník, další slupkou směrem dovnitř byl čtyřúhelník, následovaly tři sedmiúhelníky a poslední byl jediný bod uprostřed. Tyto počítačové experimenty dovedly Overmarse k hypotéze, že každá slupka množiny bodů bez šestiúhelníkové díry má nejvýše sedm vrcholů. Tuto speciálnější hypotézu dodnes nikdo ani nedokázal, ani nevyvrátil.

Vraťme se však k původní Erdösově otázce a vysvětleme, proč je rok 2005 mezníkem v její historii. Podařilo se totiž konečně alespoň principiálně vyřešit otázku existence šestiúhelníkových děr. Mnichovský matematik *Tobias Gerken* dokázal, že šestiúhelníkovou díru má každá taková množina bodů, která obsahuje devět bodů v konvexní poloze (i když netvoří devítiúhelníkovou díru, viz obr. 8). A to už bylo vyhráno, neboť od roku 1935 je známo, že pro každé pevné číslo k se v každé dostatečně početné množině najde k bodů v konvexní poloze. Konkrétně pro $k = 9$ stačí, aby množina měla 1717 bodů.*) Dnes už tedy s jistotou víme, že šestiúhelníkovou díru má každá množina o alespoň 1717 bodech.



Obr. 8



Obr. 9

*) Ve skutečnosti patrně stačí mnohem méně, totiž 129 bodů. Podle (nedokázané) Erdösovy hypotézy se totiž k bodů v konvexní poloze najde v každé množině $2^{k-2} + 1$ bodů v obecné poloze.

Své tvrzení Gerken logicky zdůvodnil zcela elementárními prostředky, jeho důkaz však zabírá 39 časopiseckých stran. Jednodušší čtyřstránkový důkaz existence šestiúhelníkových děr vymyslel zcela nedávno docent MFF UK Čech Pavel Valtr. „Nevýhoda“ Valtrova postupu spočívá v tom, že algoritmus hledání šestiúhelníkové díry začíná nikoliv u konvexního devítiúhelníku, nýbrž patnáctiúhelníku, což v důsledku vede k mnohem horšímu odhadu pro minimální počet bodů, než je Gerkenových 1717. To však tolik nevadí, když tento minimální počet bude nejspíše v desítkách (třeba přesně 30, jak věří Mark Overmars). Nalezení tohoto minimálního čísla je v současné době patrně beznadějně složitý problém. Pro srovnání uvedeme mnohem jednodušší otázku z téže oblasti geometrie, na kterou se hledá odpověď více než sedm desetiletí: Kolik nejméně bodů musí mít množina, aby v ní existovala šestice bodů v konvexní poloze jako na obr. 9? Nyní ovšem nevylučujeme, že uvnitř hledaného šestiúhelníku leží nějaké body z dané množiny, nejedná se tedy o díru. Víme pouze, že hledané číslo je nejméně 17 a nejvíce 37.

Tím naše vyprávění o mnohoúhelníkových dírách končí. Věříme, že vás zaujalo i tím, jak potvrdilo provázanost části současného teoretického výzkumu v matematice s praktickým experimentováním na počítačích. Na takové testování pracovních hypotéz neměli matematikové předchozích generací (vyzbrojeni tužkou, papírem, případně logaritmickým pravítkem) ani pomyšlení!

* * * * *

UŽ OBĚDVAL

Otec kybernetiky a počítačů Norbert Wiener (1894–1964) prý v době konání mezinárodní konference zastavil na chodbě hotelu známého s dotazem: „Nevšiml jste si, ze kterých dveří jsem vyšel?“ Známý ukázal na dveře hotelové restaurace, načež Wiener s uspokojením konstatoval: „Tak to jsem patrně již obědval.“

Ivan Štoll *)

*) Z publikace *Historky o slavných fyzicích a matematicích*, Praha, Prometheus 2005