Emil Calda

Harmonická řada a srovnávací kritérium v zajímavé úloze

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 4, 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146166

Harmonická řada a srovnávací kritérium v zajímavé úloze

Emil Calda, MFF UK Praha

V tomto článku se budeme v souvislosti s jednou úlohou z gymnaziální učebnice zabývat nekonečnými řadami.

Některé základní pojmy

Posloupností částečných součtů nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

se nazývá posloupnost

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$$

se členy:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\ldots \end{aligned}$$

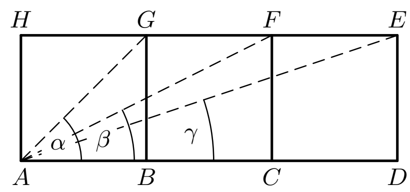
Řada, jejíž posloupnost částečných součtů má vlastní limitu, se nazývá *konvergentní*; o této limitě říkáme, že je *součtem řady*.

Řada, jejíž posloupnost částečných součtů nemá vlastní limitu (tj. když tato limita je plus nebo minus nekonečno nebo vůbec neexistuje), se nazývá *divergentní*.

Úloha v učebnici

V učebnici *Komplexní čísla* vydané nakladatelstvím Prometheus je v kapitole „Tucet netuctových úloh na závěr“ tato úloha:

V rovině jsou vedle sebe umístěny tři shodné čtverce podle obr. 1. Určete součet velikostí vyznačených úhlů α, β, γ.



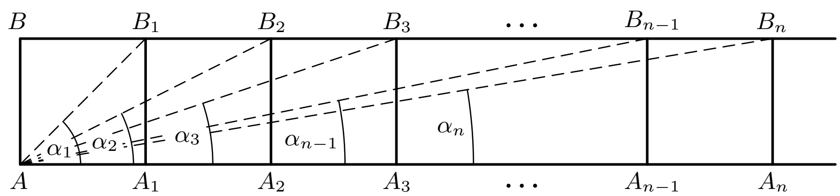
Obr. 1

Řešení úlohy je v citované učebnici podáno třemi způsoby; hledaný součet je roven $\frac{1}{2}\pi$.

Nekonečně mnoho čtverců

Zvídavý čtenář se však nemusí spokojit se třemi čtverci a položí si otázku:

Jak velký je součet velikostí příslušných úhlů, jestliže shodných čtverců umístěných vedle sebe je nekonečně mnoho (obr. 2)? Je roven určitému (konečnému) číslu, nebo je nekonečně velký?



Obr. 2

Nesprávný odhad

Protože posloupnost

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots$$

je klesající posloupností kladných čísel, jejíž limita je rovna nule, mohlo by se zdát, že nekonečná řada

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

je konvergentní a že jejím součtem je určité kladné číslo.

Zdání však klame, a to i v matematice. Pracujeme-li s nekonečnem, musíme být ještě opatrnější než obvykle. S nekonečnem nemá totiž „zdravý rozum“ žádné zkušenosti, neboť se historicky vyvinul při práci pouze s množinami konečnými – pračlověk nikdy neulovil nekonečně mnoho mamutů!

Je možné, že k uvedené argumentaci, která se nezakládá na žádné matematické větě, dochází nesprávným „zobecněním“ příkladů týkajících se geometrických řad, jejichž členy se neomezeně blíží nule. Například členy nekonečné řady

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

tvoří klesající geometrickou posloupnost kladných čísel s kvocientem $q=\frac{1}{2}$, jejíž limita je rovna nule, a přitom součet této řady je (konečné) číslo

$$s=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Harmonická řada

Existují však řady, které divergují k $+\infty$, i když jejich členy tvoří klesající posloupnost kladných čísel neomezeně se blížících nule.

Příkladem takovéto řady, kterou navíc využijeme k řešení našeho příkladu, je řada *harmonická*:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

Skutečnost, že tato řada diverguje k $+\infty$, tj. že součet dostatečného počtu jejích počátečních členů je větší než libovolně zvolené kladné číslo, ukážeme tak, že odhadneme součet s_{2^k} jejích prvních 2^k členů:

$$\begin{aligned}
s_{2^k} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ \cdots\ +\\
&\quad+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ \cdots\ +\frac{1}{2^k}\right)\geqq\\
&\geqq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ \cdots\ +\\
&\quad+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ \cdots\ +\frac{1}{2^k}\right)=\\
&= 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+\ \cdots\ +2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ \cdots\ +\frac{1}{2}=1+\frac{k}{2}
\end{aligned}$$

Zvolíme-li index $n > 2^k$, platí

$$s_n > s_{2^k} \geqq 1 + \frac{k}{2},$$

což znamená, že k libovolně velkému předem zvolenému číslu je možné určit přirozené číslo n tak, že součet prvních n členů harmonické řady je větší než toto číslo.

Tím jsme ukázali, že harmonická řada diverguje.

Srovnávací kritérium

K důkazu skutečnosti, že i řada

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

diverguje, použijeme tzv. *srovnávací kritérium*:

Pro nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots,$$

jejichž členy jsou nezáporná čísla taková, že pro všechna $n \in \mathsf{N}$ *je* $a_n \leqq b_n$, *platí:*

a) *Konverguje-li řada* $\sum b_n$, *konverguje i řada* $\sum a_n$.

b) *Diverguje-li řada* $\sum a_n$, *diverguje i řada* $\sum b_n$.

Důkaz

a) Budeme předpokládat, že řada $\sum b_n$ s nezápornými členy konverguje. Všechny její částečné součty jsou proto menší než určité kladné číslo K. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathsf{N}$ je $a_n \leqq b_n$, jsou menší než K také všechny částečné součty řady $\sum a_n$. Posloupnost těchto částečných součtů je proto shora omezená, a protože je neklesající (všechna a_n jsou nezáporná), má vlastní limitu. To znamená, že řada $\sum a_n$ konverguje.

b) Utvoříme negaci dokazované implikace a ukážeme, že je ve sporu s již dokázaným tvrzením a). Předpokládejme tedy, že řada $\sum a_n$ diverguje a řada $\sum b_n$ konverguje (negací implikace $a \Rightarrow b$ je totiž konjunkce $a \wedge \neg b$). Konverguje-li však řada $\sum b_n$, pak podle tvrzení a) konverguje i řada $\sum a_n$, což je spor s naším předpokladem. Implikace b) proto platí.

Nekonečně mnoho čtverců – pokračování

Přistoupíme (konečně!) k důkazu tvrzení, že řada

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

diverguje k plus nekonečnu, a to tak, že ji porovnáme ji s řadou:

$$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \cdots + \sin \alpha_n + \cdots$$

Členy obou těchto řad jsou kladná čísla a vzhledem k tomu, že pro $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ je $\sin \alpha < \alpha$, platí pro všechna n nerovnost $\sin \alpha_n < \alpha_n$. Proto, diverguje-li řada $\sum \sin \alpha_n$, pak podle srovnávacího kritéria diverguje i řada $\sum \alpha_n$.

Z obr. 2 vidíme, že pro všechna n platí

$$\sin \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\,,$$

takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\,.$$

Použijeme nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \geqq \frac{1}{1+n}\,,$$

která platí také pro všechna n. Přitom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

diverguje, neboť jde o řadu, jež vznikne vynecháním prvního členu harmonické řady, o jejíž divergenci jsme se už přesvědčili. Podle srovnávacího kritéria diverguje i řada $\sum \sin \alpha_n$, a tedy i řada $\sum \alpha_n$.

Zvídavému čtenáři tak můžeme odpovědět:

Bude-li shodných čtverců umístěných vedle sebe podle obr. 2 nekonečně mnoho, bude součet

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

nekonečně velký.