Miroslava Jarešová; Ivo Volf

Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s elipsou

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 3, 8–20

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146158`

FYZIKA

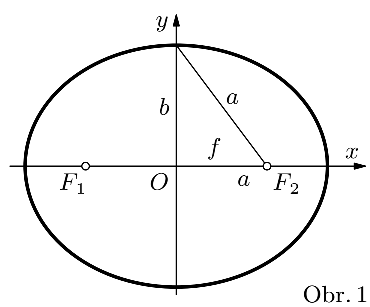
Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s elipsou

Miroslava Jarešová, Ivo Volf, PedF UHK Hradec Králové

Řekne-li se *elipsa* v souvislosti s fyzikou, je možné si představit celou řadu situací. Někomu se vybaví skládání kolmých kmitů, někomu třeba tyč, která se jedním koncem opírá o svislou stěnu a druhým koncem o podlahu a začne sjíždět po zdi dolů (trajektorií pohybu libovolně zvoleného bodu tyče je část elipsy). My se zaměříme na případy, kde se elipsa vyskytuje asi nejčastěji – gravitační pole.

Než začneme řešit jednotlivé úlohy, doplňme středoškolské učivo fyziky o některé další poznatky, které budeme potřebovat.

Připomeňme, že elipsa je množina všech bodů v rovině takových, že součet jejich vzdáleností od dvou daných bodů (ohnisek) je stejný. Při označení z obr. 1, tedy mimo jiné $|F_1O| = |F_2O| = f$, platí $a^2 = b^2 + f^2$ a *excentricita* elipsy e je v astronomii definována jako podíl $e = f/a$.*)

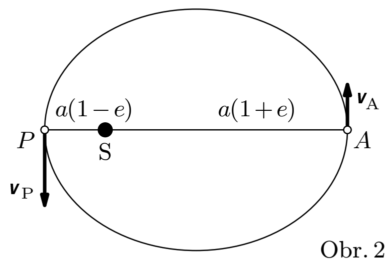


Obr. 1

*) Protože se v tomto článku budeme zabývat především elipsou v astronomii, musíme předeslat jedno varování před terminologickými rozdíly. V matematice se slovem *excentricita* (méně často i českým slovem *výstřednost*) a symbolem e označuje vzdálenost $|OF_1|$ ohniska od středu elipsy. Poměr této vzdálenosti a délky hlavní poloosy, tedy bezrozměrné číslo $|OF_1|/a$, se v matematice nazývá *numerická excentricita* a označuje se symbolem ε. Naproti tomu v astronomii se vzdálenost $|OF_1|$ neužívá, slovem *excentricita* a symbolem e se tam označuje poměr $|OF_1|/a$, tedy to, čemu matematici říkají „numerická excentricita“. V tomto článku budeme termín excentricita a písmeno e používat jako v astronomii, tedy pro bezrozměrnou veličinu.

Podle prvního Keplerova zákona se planety (a samozřejmě i jiná tělesa, např. planetky, meteoroidy nebo kosmické sondy „bez vlastního pohonu") pohybují po elipsách, které mají jedno ohnisko v Slunci.*) Taková oběžná dráha je zobrazena na obr. 2. Bod dráhy, který je nejbližší Slunci (v obrázku označenému S), se nazývá *perihelium* (bod P); nejvzdálenější bod dráhy se nazývá *afélium* (bod A). Pro jejich vzdálenosti r_P a r_A od Slunce (ohniska) snadno odvodíme vztahy:

$$r_\mathrm{P} = a - f = a(1 - e)$$
$$r_\mathrm{A} = a + f = a(1 + e)$$



Obr. 2

Podle druhého Keplerova zákona (zákona ploch) platí, že za stejné doby opíše průvodič planety stejné plochy. Je-li planeta v periheliu, ve vzdálenosti r_P od Slunce, opíše za krátkou dobu Δt její průvodič plochu velmi úzkého rovnoramenného trojúhelníku o základně $v_\mathrm{P}\,\Delta t$ a výšce r_P, tedy plochu $v_\mathrm{P}\, r_\mathrm{P}\, \Delta t/2$ (v_P je velikost okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{P}$ planety při průchodu periheliem). Stejným způsobem dostaneme, že za stejný čas Δt opíše průvodič v aféliu plochu $v_\mathrm{A}\, r_\mathrm{A}\, \Delta t/2$ (v_A je opět velikost okamžité rychlosti). Protože obě plochy jsou podle zákona ploch stejné, musí platit $v_\mathrm{P}\, r_\mathrm{P} = v_\mathrm{A}\, r_\mathrm{A}$. Dosadíme-li sem výrazy pro vzdálenosti perihelia a afélia od Slunce, dostáváme vztah

$$\frac{v_\mathrm{P}}{v_\mathrm{A}} = \frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{P}} = \frac{1+e}{1-e}\,. \tag{1}$$

Nyní odvodíme vztah pro výpočet velikosti okamžité rychlosti pohybu planety po eliptické trajektorii v libovolném bodě trajektorie. K tomuto odvození použijeme zákon zachování mechanické energie.

Víme, že pohybuje-li se hmotný bod po eliptické trajektorii, mění se jeho okamžitá rychlost i vzdálenost od středu centrálního tělesa. Mění se tedy i jeho kinetická a potenciální energie, ale celková mechanická energie

*) Keplerovy zákony platí jen přibližně – přesně by se podle nich pohybovala jen planeta, na kterou by působila pouze gravitační síla Slunce a ne už např. gravitační síly jiných planet. Chyba je však poměrně malá a v našich úlohách budeme předpokládat, že Keplerovy zákony pro pohyb planet platí.

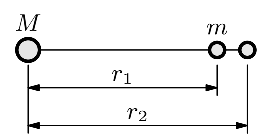
zůstává konstantní. Připomeňme, že pro výpočet kinetické energie platí známý vztah

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}mv^2,$$

kde m je hmotnost a v velikost okamžité rychlosti.

Potřebujeme ještě vztah pro výpočet *gravitační potenciální energie* $E_\mathrm{pg}(r)$ tělesa o hmotnosti m ve vzdálenosti r od nějakého centrálního tělesa o hmotnosti M (v našem případě to bude potenciální energie planety ve vzdálenosti r od Slunce). Tento vztah se získá integrací, matematické nástroje, které známe ze střední školy, na to nestačí. Ukážeme zhruba, jakým postupem se k tomuto vztahu dá dojít; jeho přesný (velmi jednoduchý) důkaz si čtenář může udělat, až se naučí integrovat.

Začneme tím, že těleso o hmotnosti m posuneme ze vzdálenosti r_1 od středu centrálního tělesa do *o málo větší* vzdálenosti r_2 (obr. 3). Přírůstek potenciální energie se rovná práci W_{12}, kterou při tom vykonáme:



Obr. 3

$$W_{12} = E_\mathrm{pg}(r_2) - E_\mathrm{pg}(r_1)$$

Síla, jíž při posouvání působíme, je stejná jako gravitační síla, kterou se obě tělesa navzájem přitahují. Závisí tedy na vzdálenosti; ve vzdálenosti r_1 od centrálního tělesa je velikost síly rovna $F_1 = \varkappa Mm/r_1^2$ a ve vzdálenosti r_2 je rovna $F_2 = \varkappa Mm/r_2^2$ ($\varkappa$ je gravitační konstanta).

Jestliže se ale r_2 liší od r_1 jen málo, můžeme vzít nějakou „střední“ sílu F_p, která leží mezi F_1 a F_2 *), a vypočítat práci, kterou vykonáme, a tedy i přírůstek potenciální energie, takto:

$$W_{12} = E_\mathrm{pg}(r_2) - E_\mathrm{pg}(r_1) = F_\mathrm{p}(r_2 - r_1)$$

Za „střední“ sílu F_p můžeme vzít například geometrický průměr sil na začátku a na konci posouvání:

$$F_\mathrm{p} = \sqrt{F_1F_2} = \varkappa\,\frac{Mm}{r_1r_2}$$

*) Je-li rozdíl $r_2 - r_1$ opravdu malý, nezáleží vlastně na tom, kterou „střední“ sílu zvolíme, hlavně když bude ležet mezi F_1 a F_2.

Práce, kterou vykonáme, pak je

$$W_{12} = \varkappa \frac{Mm}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = \varkappa \frac{Mm}{r_1} - \varkappa \frac{Mm}{r_2} = -\varkappa \frac{Mm}{r_2} - \left(-\varkappa \frac{Mm}{r_1}\right).$$

To je současně přírůstek potenciální energie:

$$E_{\mathrm{pg}}(r_2) - E_{\mathrm{pg}}(r_1) = -\varkappa \frac{Mm}{r_2} - \left(-\varkappa \frac{Mm}{r_1}\right)$$

Stejně vypočítáme, že při přenesení tělesa o další malý krůček do vzdálenosti r_3 se potenciální energie zvětší o

$$E_{\mathrm{pg}}(r_3) - E_{\mathrm{pg}}(r_2) = -\varkappa \frac{Mm}{r_3} - \left(-\varkappa \frac{Mm}{r_2}\right),$$

takže celkový přírůstek této energie při přechodu ze vzdálenosti r_1 do vzdálenosti r_3 je

$$E_{\mathrm{pg}}(r_3) - E_{\mathrm{pg}}(r_1) = -\varkappa \frac{Mm}{r_3} - \left(-\varkappa \frac{Mm}{r_1}\right).$$

Takto můžeme sčítat přírůstky potenciální energie dál a dál. Uděláme-li těchto malých krůčků velký počet, bude celková změna potenciální energie opět vyjádřena rozdílem

$$E_{\mathrm{pg}}(r) - E_{\mathrm{pg}}(r_1) = -\varkappa \frac{Mm}{r} - \left(-\varkappa \frac{Mm}{r_1}\right). \tag{2}$$

Rozdíl vzdáleností r a r_1 však už nemusí být malý, protože je roven součtu velkého počtu malých přírůstků vzdálenosti. Vypočítali jsme tak přírůstek potenciální energie i pro tak velká posunutí, že se při nich působící síla mění. A právě takové sčítání velkého počtu malých přírůstků, kterým nakonec dostaneme hledaný velký přírůstek, je integrace.

Z rovnosti (2) plyne, že potenciální energie tělesa v gravitačním poli vzrůstá se vzdáleností r od centrálního tělesa stejně jako veličina $-\varkappa Mm/r$. To znamená, že je buď rovna této veličině, nebo se od ní liší jen o nějakou konstantu. Nejjednodušší a nejobvyklejší je volit prostě

$$E_{\mathrm{pg}}(r) = -\varkappa \frac{Mm}{r}. \tag{3}$$

Dále ze vztahů (1), (3) a ze zákona zachování mechanické energie odvodíme nejprve vztah pro celkovou energii E obíhajícího tělesa a pak vztah pro velikost okamžité rychlosti v v libovolném bodě eliptické trajektorie. Napíšeme soustavu rovnic

$$v_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{P}}\,\frac{1-e}{1+e} \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\,mv_{\mathrm{P}}^2 - \varkappa\,\frac{Mm}{a(1-e)} = \frac{1}{2}\,mv_{\mathrm{A}}^2 - \varkappa\,\frac{Mm}{a(1+e)} \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \varkappa\,\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}\,mv_{\mathrm{P}}^2 - \varkappa\,\frac{Mm}{a(1-e)} \tag{6}$$

Dosadíme-li z (4) do (5) a upravíme, dostaneme

$$v_{\mathrm{P}}^2 = \frac{\varkappa M}{a}\cdot\frac{1+e}{1-e}\,.$$

Tím jsme vyjádřili velikost rychlosti v perihelu pomocí gravitační konstanty $\varkappa$, hmotnosti centrálního tělesa M a dvou veličin charakterizujících elipsu – délky hlavní poloosy a a excentricity e.

Protože již známe rychlost planety v perihelu i její vzdálenost od Slunce, můžeme vypočítat její celkovou energii E v perihelu:

$$E = E_k + E_{\mathrm{pg}} = \frac{1}{2}\,mv_{\mathrm{P}}^2 - \frac{\varkappa Mm}{r_{\mathrm{P}}} = \frac{\varkappa Mm}{2a}\cdot\frac{1+e}{1-e} - \frac{\varkappa Mm}{a}\cdot\frac{1}{1-e} =$$
$$= \frac{\varkappa Mm}{2a(1-e)}\,(1+e-2) = -\frac{\varkappa Mm}{2a}$$

Celková energie se ovšem zachovává, v každém bodě své oběžné dráhy má planeta stejnou celkovou energii jako v perihelu. Dospěli jsme tak k velmi zajímavému výsledku: Energie planety na oběžné dráze okolo Slunce je $E = -\varkappa Mm/2a$, závisí tedy jen na délce hlavní poloosy dráhy, ale ne na její excentricitě.

Co znamená, že energie je záporná? Když zvětšujeme délku hlavní poloosy a, blíží se energie ze záporné strany k nule. Energie tedy roste s rostoucím a (protože na to, abychom planetu dostali na dráhu s větším a, jí musíme dodávat energii) a je vždy menší než energie planety, která je nekonečně vzdálená od Slunce (která se pohybuje daleko v mezihvězdném prostoru). Jinými slovy, například naše Země se nemůže nekonečně vzdálit od Slunce, protože na to nemá dost energie.

Teď se vrátíme k výpočtu velikosti rychlosti v v libovolném bodě oběžné dráhy, jehož vzdálenost od Slunce je r. Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\varkappa Mm}{r} = E = -\frac{\varkappa Mm}{2a}\,.$$

Odtud dostaneme

$$v = \sqrt{\varkappa M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}\,. \tag{7}$$

Tento vztah použijeme v následujících dvou úlohách. Další informace k této problematice je možno nalézt např. v [1].

První úloha je zaměřena na pohyb nově objevených těles v naší sluneční soustavě.

1. Quaoar a Sedna

Počátkem října 2002 proběhla ve sdělovacích prostředcích zpráva o objevu „desáté planety" ve sluneční soustavě. Bylo to největší těleso objevené ve sluneční soustavě v posledních 72 letech (Pluto byl objeven v únoru 1930). Objevitelé tzv. „desáté planety" zvolili pro nově objevené těleso jméno boha indiánského kmene Tongva v Kalifornii, což je *Quaoar*. Quaoar obíhá kolem Slunce po téměř kruhové dráze s excentricitou $e = 0{,}04$ a hlavní poloosou délky 43 AU*). Nyní už víme, že Quaoar je pravděpodobně ledové těleso, v němž jsou úlomky křemičitanů různé velikosti, jež je pošpiněné prachem, který již při vzniku sluneční soustavy zamrzl do ledu. Quaoar není planeta, ale velký *kuiperoid*, tj. ledové těleso v *Kuiperově pásu*. Také Pluto je dnes považován za velkého kuiperoida, ale v roce 1930, kdy byl objeven, byl zařazen mezi planety.

15. března 2004 bylo oznámeno objevení „nové planety" pojmenované *Sedna* (po inuitské bohyni moří a oceánů). V době svého objevu se Sedna nacházela 90 AU od Slunce, přísluní 76 AU dosáhne až v roce 2075, odsluní má ve vzdálenosti 915 AU od Slunce. Eliptická oběžná dráha Sedny je odlišná od všech dosud astronomy pozorovaných družic. Po Marsu se jedná o druhý nejčervenější objekt ve sluneční soustavě od roku 1930. Problém, zda je Sedna planeta, nebo planetka, je dodnes diskutován.

*) Připomeňme, že AU je astronomická délková jednotka, která je rovna délce hlavní poloosy oběžné dráhy Země kolem Slunce; $1\,\mathrm{AU} \doteq 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m.

a) Vypočtěte oběžnou dobu kuiperoidu Quaoar a určete velikosti rychlostí, kterými prochází periheliem a aféliem.
b) Vypočtěte oběžnou dobu Sedny a určete velikosti rychlostí, kterými prochází periheliem a aféliem, a velikost rychlosti Sedny v době, kdy byla objevena.

Řešení

a) Podle třetího Keplerova zákona platí pro oběžné doby T_1, T_2 planet, jejichž hlavní poloosy mají délky a_1, a_2, vztah

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}\,. \tag{8}$$

Jestliže za první z planet vezmeme Zemi, pro niž $T_1 = 1$ rok, $a_1 = 1\,\mathrm{AU}$, a za druhou „planetu“ Quaoar, pro který $a_2 = 43\,\mathrm{AU}$, vypočteme z (8) oběžnou dobu T_2 Quaoaru:

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3} \cdot T_1 \doteq 282 \text{ let}$$

K určení rychlostí použijeme vztah (7). Pro výpočet v_P, resp. v_A dosadíme $r = r_\mathrm{P} = a(1-e)$, resp. $r = r_\mathrm{A} = a(1+e)$. Dostaneme tak:

$$v_\mathrm{P} = \sqrt{\varkappa M\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\cdot\frac{1+e}{1-e}}$$

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{\varkappa M\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\cdot\frac{1-e}{1+e}}$$

V [2] najdeme:

$$1\,\mathrm{AU} \doteq 1{,}496\cdot 10^{11}\ \mathrm{m} \tag{9}$$

$$M \doteq 1{,}989\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \tag{10}$$

$$\varkappa \doteq 6{,}673\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}} \tag{11}$$

Dosazením těchto hodnot a údajů $a = 43\,\mathrm{AU}$, $e = 0{,}04$ ze zadání úlohy vypočteme

$$v_\mathrm{P} \doteq 4\,770\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, \qquad v_\mathrm{A} \doteq 4\,400\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Vidíme, že velikosti rychlostí při průchodu periheliem a aféliem se v případě kuiperoidu Quaoar od sebe příliš neliší.

b) Ze zadání víme, že pro Sednu platí $r_\mathrm{P} = 76\,\mathrm{AU}$, $r_\mathrm{A} = 915\,\mathrm{AU}$. Pro určení rychlostí použijeme opět vztah (7), do nějž dosadíme $a = \frac{1}{2}(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})$, tedy vztah

$$v = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A}}\right)} = \sqrt{2\varkappa M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A}}\right)}\,. \qquad (12)$$

Dosadíme-li sem za r vzdálenost Sedny od Slunce v době jejího objevu, tj. $r = 90\,\mathrm{AU}$, dále dosadíme známé hodnoty r_P, r_A a konstanty z (9), (10), (11), vypočteme $v \doteq 4\,230\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, což je velikost rychlosti Sedny v okamžiku, kdy byla objevena.

Dosazením $r = r_\mathrm{P}$, resp. $r = r_\mathrm{A}$ dostaneme po úpravě

$$v_\mathrm{P} = \sqrt{2\varkappa M \frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{P}(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})}}\,, \qquad v_\mathrm{A} = \sqrt{2\varkappa M \frac{r_\mathrm{P}}{r_\mathrm{A}(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})}}\,.$$

Po číselném dosazení vyjde

$$v_\mathrm{P} \doteq 4\,640\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, \qquad v_\mathrm{A} \doteq 390\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

V tomto případě se obě rychlosti liší velmi výrazně.

Oběžnou dobu vypočteme z třetího Keplerova zákona (8), do nějž za planetu označenou indexem 1 dosadíme Zemi a za „planetu“ označenou indexem 2 Sednu; připomeňme, že platí $a_2 = \frac{1}{2}(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})$:

$$T_2 = \sqrt{\frac{(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})^3}{8a_1^3}} \cdot T_1 \doteq 11\,030 \text{ let}$$

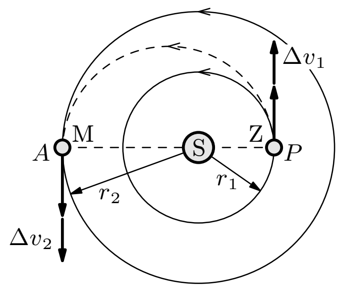
Druhá úloha se týká přechodu sondy z jedné oběžné dráhy na druhou.

2. Hohmannova trajektorie

Oběžná sonda pohybující se po kruhové dráze kolem Slunce ve vzdálenosti $r_1 = 1\,\mathrm{AU}$ (oběžná dráha Země) má být vyslána na kruhovou oběžnou dráhu Marsu, tj. na kruhovou dráhu o poloměru $r_2 = 1{,}52\,\mathrm{AU}$. Německý fyzik Hohmann v roce 1925 dokázal, že energeticky nejvýhodnější pro takový přechod je eliptická dráha, která se dotýká trajektorie Země v místě startu a trajektorie Marsu v místě přechodu na jeho oběžnou dráhu, přičemž tato místa musí ležet na opačných stranách od Slunce. Aby vše dobře proběhlo, je třeba sondě na oběžné dráze Země zvýšit velikost okamžité rychlosti o hodnotu Δv_1 a na oběžné dráze Marsu pak o hodnotu Δv_2. Celá situace je znázorněna na obr. 4, kde sonda v okamžiku startu z oběžné dráhy Země je označena Z a v okamžiku přechodu na oběžnou dráhu Marsu je označena M.

a) Určete velikosti přírůstků rychlostí Δv_1, Δv_2.
b) Určete dobu letu po přechodové trajektorii.

[Při výpočtech zanedbejte gravitační působení planet, přihlížejte pouze ke gravitačnímu působení Slunce. Dále předpokládejte, že motory sondy budou zapnuty pouze v okamžicích, kdy kruhová dráha přejde na eliptickou a naopak.]



Obr. 4

Řešení

a) Rychlost pohybu sondy po Hohmannově eliptické trajektorii je dána vztahem (7). Po dosazení $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ vypočteme

$$v = \sqrt{2\varkappa M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)}. \qquad (13)$$

V přísluní (bod P na obr. 4) je $r = r_1$. Dosadíme-li tuto hodnotu do (13), dostaneme

$$v_{\mathrm{P}} = \sqrt{2\varkappa M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)} = \sqrt{2\varkappa M\,\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}\,.$$

Na počátku před urychlením je sonda na kruhové dráze Země, proto velikost její počáteční rychlosti je

$$v_0 = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r_1}}$$

[do (7) jsme dosadili $r = r_1,\ a = r_1$]. Tedy

$$\Delta v_1 = v_\mathrm{P} - v_0 = \sqrt{2\varkappa M \frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}} - \sqrt{\frac{\varkappa M}{r_1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa M}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1 \right),$$

po číselném dosazení

$$\Delta v_1 \doteq 2\,930\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Podobně vypočteme velikost rychlosti sondy na konci Hohmannovy trajektorie v_A, velikost její rychlosti na kruhové dráze Marsu v_k a přírůstek Δv_2:

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{2\varkappa M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1+r_2} \right)} = \sqrt{2\varkappa M \frac{r_1}{r_2(r_1+r_2)}}$$

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r_2}}$$

$$\Delta v_2 = v_\mathrm{k} - v_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}} \right) \doteq 2\,640\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

b) Dobu letu sondy po přechodové trajektorii T_L vypočteme pomocí třetího Keplerova zákona (8). Za první z planet vezmeme Zemi, tedy $a_1 = 1\,\mathrm{AU},\ T_1 = 1$ rok, za druhou „planetu“ pak sondu letící po eliptické trajektorii, pro niž $a_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 1{,}26\,\mathrm{AU},\ T_2 = 2T_\mathrm{L}$ (doba celého obletu sondy po eliptické trajektorii by byla dvojnásobkem doby jejího letu při přechodu z oběžné dráhy Země na oběžnou dráhu Marsu). Po dosazení těchto hodnot do (8) vypočteme

$$T_\mathrm{L} = \frac{1}{2} \cdot T_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{3/2} T_1 \doteq 0{,}707 \text{ roku} \doteq 260 \text{ dní}.$$

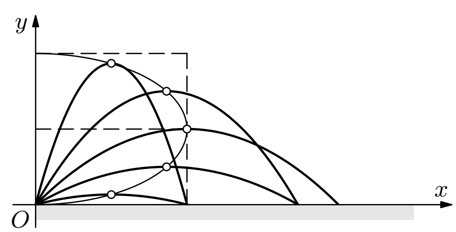
V třetí úloze se budeme zabývat vrhem šikmo vzhůru v homogenním tíhovém poli Země.

3. Elipsa jako geometrické místo bodů

Z odpalovacího zařízení je kulička (kterou je možno považovat za hmotný bod) vystřelována ve stejné svislé rovině počáteční rychlostí konstantní velikosti v_0 pod různými úhly $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$. Dokažte, že geometrické místo vrcholů všech parabolických drah, po kterých se kulička pohybuje, je polovina elipsy (bez krajních bodů).

Řešení

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic Oxy jako v obr. 5.



Obr. 5

Nejdříve dokážeme, že pro každý úhel $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ leží vrchol $[x, y]$ paraboly, po níž se kulička při vrhu šikmo vzhůru pohybuje, na téže elipse (její polovině) – najdeme rovnici této elipsy. Pro souřadnice x, y vrcholu paraboly platí

$$x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}, \tag{14}$$

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \tag{15}$$

(g je tíhové zrychlení). Odtud dostaneme:

$$\cos\alpha = \frac{xg}{v_0^2 \sin\alpha} \tag{16}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{2yg}{v_0^2} \tag{17}$$

Z rovnosti (16) vyjádříme $\cos^2\alpha$ a do tohoto vyjádření dosadíme za $\sin^2\alpha$ z rovnosti (17):

$$\cos^2\alpha = \frac{x^2g^2}{v_0^4\sin^2\alpha} = \frac{x^2g^2}{v_0^4\cdot\dfrac{2yg}{v_0^2}}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{x^2g}{2yv_0^2} \tag{18}$$

Dále použijeme vztah

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Dosadíme do něj z (17) a (18) a upravíme:

$$\frac{2yg}{v_0^2} + \frac{x^2g}{2yv_0^2} = 1$$

$$x^2 + 4y^2 = \frac{2yv_0^2}{g} \tag{19}$$

Rovnice (19) je rovnice elipsy. Abychom určili její střed, délky poloos atd., provedeme v ní doplnění na druhou mocninu dvojčlenu a další úpravy. Postupně dostaneme:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 2\cdot y\cdot\frac{v_0^2}{4g} + \left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{v_0^2}{2g}\right)^2} + \frac{\left(y - \dfrac{v_0^2}{4g}\right)^2}{\left(\dfrac{v_0^2}{4g}\right)^2} = 1 \tag{20}$$

Rovnice (20) je rovnice elipsy se středem $S\big[0, v_0^2/(4g)\big]$ a poloosami délek $a = v_0^2/(2g)$, $b = v_0^2/(4g)$, tedy $b = \frac{1}{2}a$. Vrchol každé z uvažovaných parabol leží na této elipse, a to na její „pravé polovině“ (obr. 5), neboť pro každé $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ je x-ová souřadnice vrcholu příslušné paraboly kladná, jak je vidět z (14).

Dokázali jsme, že geometrické místo vrcholů všech parabolických drah, po kterých se kulička pohybuje, je částí „pravé poloviny“ elipsy (20). Zbývá dokázat, že je to celá tato polovina elipsy (bez krajních bodů). Zvolme libovolný bod $[x, y]$, který na této polovině elipsy leží. Pro jeho y-ovou souřadnici platí

$$y \in \left(0,\ \frac{v_0^2}{2g}\right).$$

Výraz $\sin^2\alpha$ nabývá pro $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ všech hodnot z intervalu $(0, 1)$. Z (15) proto vyplývá, že existuje (právě jeden) úhel $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ takový, že y-ová souřadnice vrcholu paraboly, po níž se pohybuje kulička vystřelená pod tímto úhlem α, je rovna y-ové souřadnici zvoleného bodu $[x, y]$. Z předchozích úvah víme, že x-ová souřadnice vrcholu této paraboly je dána vztahem (14) a že tento vrchol leží na „pravé polovině“ elipsy (20). Je to tedy nutně zvolený bod $[x, y]$. Tím je dokázáno, že libovolný bod $[x, y]$ „pravé poloviny“ elipsy (20) patří do zkoumaného geometrického místa bodů. Hledaným geometrickým místem vrcholů všech uvažovaných parabol je tedy (celá) nalezená polovina elipsy (bez krajních bodů).

Víme, že při vrhu šikmo vzhůru je maximální dolet pro úhel $\alpha = \frac{1}{4}\pi$. Tomuto úhlu odpovídají souřadnice vrcholu paraboly $x_{\max} = v_0^2/(2g)$, $y_{\max} = v_0^2/(4g)$. y-ová souřadnice tohoto vrcholu je vlastně y-ovou souřadnicí středu nalezené elipsy a zároveň určuje délku její vedlejší poloosy, x-ová souřadnice vrcholu této paraboly určuje délku hlavní poloosy elipsy (obr. 5).

Literatura:

[1] Šedivý, P., Volf, I.: *Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli.* Knihovnička FO č. 43, Hradec Králové, MAFY 2000 Také `http://fo.cuni.cz`, popř. `http://www.uhk.cz/fo`

[2] Mikulčák, J., Charvát, J., Macháček, M., Zemánek, F.: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy.* Prometheus, Praha 2003

[3] `http://www.akademon.cz/source/qua.htm`

[4] `http://www.astrolexikon.webzdarma.cz/planety/quaoar/quaoar.htm`

[5] `http://cs.wikipedia.org/wiki/sedna_(planetka)`

[6] `http://www.stanford.edu/~klynn/mars_paper.htm`