47. ročník Fyzikální olympiády, kategorie C, D. Úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 80 (2005), No. 4, 41–48

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146120

47. ročník Fyzikální olympiády, kategorie C, D
Úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.)

KATEGORIE C

1. Pád okolo okna

Volně padající těleso přeletělo před oknem výškové budovy za dobu t. Výška okna je b.

a) Určete rychlost $\boldsymbol{v}_1$ tělesa při horním okraji a $\boldsymbol{v}_2$ při dolním okraji.

b) Jakou dobu t_1 padalo těleso do okamžiku, kdy se objevilo při horním okraji okna?

c) Z jaké výšky h od dolního okraje okna bylo těleso volně puštěno?

d) Jak velkou rychlostí $\boldsymbol{v}_3$ dopadne těleso na zem, je-li dolní okraj okna ve výšce c nad zemí?

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $t = 0{,}100\,\mathrm{s}$, $b = 2{,}10\,\mathrm{m}$, $c = 30{,}0\,\mathrm{m}$.

2. Plavba přes řeku

Motorový člun, jehož rychlost na klidné vodní hladině by měla velikost v, se pohybuje po řece šířky d. Hloubka řeky je všude stejná a mnohem menší než šířka. Rychlost $\boldsymbol{v}_0$ vodního proudu u hladiny je proto v celé šířce řeky stejná.

a) Určete nejmenší dobu t_1, za kterou se člun dostane od jednoho břehu ke druhému. Jakou rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ se bude člun pohybovat vzhledem k okolní krajině? Jaká bude poloha místa přistání B vzhledem k místu startu A?

b) Za jakou nejkratší dobu t_2 může člun dorazit z místa A do nejbližšího místa A' na druhém břehu? O jaký úhel β musíme odchýlit osu lodi od směru kolmého k proudu řeky a jakou rychlostí $\boldsymbol{v}_2$ se bude člun pohybovat vzhledem k okolní krajině?

c) Za jakou nejkratší dobu t_3 může člun dorazit z místa B, které jsme určili v úloze a), zpět do místa A? O jaký úhel γ musíme odchýlit osu lodi od směru kolmého k proudu řeky a jakou rychlostí $\boldsymbol{v}_3$ se bude člun pohybovat vzhledem k okolní krajině?

d) Rozhodněte, jak závisí řešitelnost úloh a) až c) na velikostech rychlostí $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v}_0$.

Řešte obecně, pak pro hodnoty: $d = 600\,\mathrm{m}$, $v_0 = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

3. Plování

Vnitřní objem duté měděné polokoule je V_1. Položíme-li polokouli na vodu, plove tak, že její dolní část se ponoří pod hladinu vody do hloubky $h = 0{,}5R$, kde R je vnější poloměr polokoule.

a) Určete vnitřní poloměr r polokoule.

b) Určete vnější poloměr R polokoule.

c) Určete hmotnost m měděné polokoule.

d) Určete objem V_2 vody, kterou můžeme nalít do plovoucí polokoule, aby se ještě nepotopila.

Řešte obecně a pro hodnoty: hustota mědi $\varrho = 8{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, hustota vody $\varrho_0 = 1{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $V_1 = 2{,}00\,\mathrm{dm^3}$.

Návod: Objem kulové úseče můžeme vypočítat podle vztahu: $V = \pi h^2 R - \dfrac{\pi h^3}{3}$.

4. Kruhový děj

Činnost spalovacího motoru modelujeme kruhovým dějem, při kterém je vzduch jako pracovní látka o počátečním objemu $V_1 = 571\,\mathrm{cm^3}$, počátečním tlaku $p_1 = 100\,\mathrm{kPa}$ a počáteční teplotě $t_1 = 20\,°\mathrm{C}$ (stav 1) nejprve adiabaticky stlačen na objem $V_2 = 71\,\mathrm{cm^3}$ (stav 2). Pak se izochorickým ohřátím jeho tlak zvětší na $p_3 = 2{,}5p_2$ (stav 3). Následuje adiabatická expanze na původní objem (stav 4) a izochorické ochlazení na původní tlak (návrat do stavu 1).

Stav	$V/\mathrm{cm^3}$	p/kPa	T/K
1	571	100	
2	71		
3	71		
4	571		

a) Doplňte tabulku a sestrojte p-V diagram kruhového děje.
b) Určete látkové množství a hmotnost použitého vzduchu.
c) Určete celkovou práci při jednom cyklu a účinnost motoru při popsaném kruhovém ději.

Vzduch považujte za ideální plyn o relativní molekulové hmotnosti $M_\mathrm{r} = 28{,}96$. Vnitřní energie $U = 2{,}5nRT$. Pro adiabatický děj ve vzduchu platí *Poissonův zákon* ve tvaru $pV^{1,4} = konst.$

5. Tání ledu

V termosce o tepelné kapacitě K je led o hmotnosti m a teplotě t_1 a topné tělísko o odporu R, jehož tepelnou kapacitu můžeme zanedbat. Topné tělísko připojíme k elektrickému zdroji. Jaké musí být svorkové napětí zdroje U, aby za dobu τ led roztál a teplota uvnitř termosky stoupla na t_2?

Řešte obecně a pro hodnoty: $K = 55\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$, $m = 0{,}85\,\mathrm{kg}$,
$t_1 = -8\,°\mathrm{C}$, $t_2 = 25\,°\mathrm{C}$, $R = 5{,}8\,\Omega$, $\tau = 45\,\mathrm{min}$.
Měrné tepelné kapacity ledu a vody jsou $c_1 = 2100\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot J^{-1}}$ a $c_2 = 4200\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot J^{-1}}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_\mathrm{t} = 332\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

Pro dané hodnoty sestrojte graf závislosti teploty na čase během celého děje.

6. *Praktická úloha*: **Měření součinitele odporu dutého kužele**

Před praktickým provedením této úlohy doporučujeme prostudovat studijní text *Vybíral, Zdeborová: Odporové síly* (Knihovnička FO, č. 48), str. 19 až 21.

Pomůcky: váhy, stopky, tenký papír, rýsovací potřeby, délková měřidla.

Popis měřicí metody: Z tenkého (nejlépe průklepového) papíru vystřihněte dvě kruhové výseče o středovém úhlu 270 °C a poloměru 10 cm a dvě kruhové výseče o středovém úhlu 225 °C a stejném poloměru. Z těchto výsečí slepte pomocí úzkého proužku tenké izolepy papírové kornouty.

a) Kornouty zvažte a vypočítejte jejich vrcholové úhly a poloměry podstav.
b) Změřte teplotu a tlak vzduchu v místnosti a pomocí stavové rovnice určete hustotu vzduchu, ve kterém provedete měření.

Při teplotě $0\,°\mathrm{C}$ a tlaku $10^5\,\mathrm{Pa}$ je hustota suchého vzduchu $\varrho_0 = 1{,}276\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

Úlohy c) a d) proveďte nejprve s dvojicí kornoutů s větším vrcholovým úhlem a potom se zbývajícími dvěma kornouty.

c) Pozorujte pád kornoutu otočeného vrcholem dolů od stropu místnosti z co největší výšky h_0. Účinkem odporu vzduchu se rychlost kornoutu velmi brzy ustálí a jeho pohyb bude rovnoměrný. Rychlost pádu určete z doby, která uplyne od průletu kornoutu kolem značky ve výšce $h < h_0$ do jeho dopadu na podlahu místnosti. Volte $h_0 - h > 0{,}5\,\mathrm{m}$. Měření doby pádu několikrát zopakujte a stanovte aritmetický průměr naměřených hodnot.

d) Úlohu c) opakujte se dvěma kornouty vloženými do sebe. Ověřte, že velikost odporové síly působící na kornouty je přímo úměrná druhé mocnině rychlosti. Kornout složený ze dvou kornoutů má dvakrát větší hmotnost než jeden samostatný, proto by jeho rychlost měla být $\sqrt{2}$krát větší než rychlost jednoduchého kornoutu – pokud platí *Newtonův vztah*

$$F = \tfrac{1}{2} C \varrho S v^2 = mg.$$

e) Ze známé hustoty vzduchu, hmotnosti a rozměrů kornoutu a jeho ustálené rychlosti při pádu určete součinitel odporu C dutého kužele s daným vrcholovým úhlem.

f) Ze stejného papíru vyrobte kornouty o stejných vrcholových úhlech, ale jiných poloměrech podstavy. Ověřte, že ustálené rychlosti pádu kornoutů se stejnými vrcholovými úhly jsou stejné, a vysvětlete to.

g) Porovnejte vypočtené hodnoty součinitele odporu C s hodnotami uvedenými v učebnici fyziky pro jiné tvary těles.

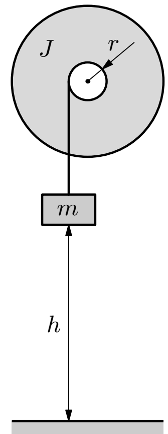
7. Setrvačník

Na vodorovnou hřídel setrvačníku o poloměru r bylo navinuto tenké vlákno. Na něm bylo ve výšce h nad podlahou zavěšeno závaží o hmotnosti m (obr. 1). Po uvolnění začalo závaží klesat a dosáhlo podlahy za dobu t_1. Setrvačník roztočený působením závaží pokračoval v otáčivém pohybu a zastavil se až za dobu t_2 od okamžiku, kdy se závaží dotklo podlahy. Zbytek vlákna se přitom odmotal. Předpokládejme, že moment M odporových sil, které brzdily pohyb setrvačníku, byl konstantní.

a) Určete úhlové zrychlení ε_1 setrvačníku během roztáčení, úhlové zrychlení ε_2 setrvačníku během zastavování a úhlovou rychlost ω_1 setrvačníku v okamžiku, kdy se závaží dotklo podlahy.

b) Určete moment setrvačnosti J setrvačníku vzhledem k jeho rotační ose a moment M brzdících sil.

Řešte obecně a pro hodnoty: $r = 7{,}00\,\mathrm{mm}$, $m = 0{,}500\,\mathrm{kg}$, $h = 1{,}00\,\mathrm{m}$, $t_1 = 5{,}00\,\mathrm{s}$, $t_2 = 30{,}00\,\mathrm{s}$.



Obr. 1

KATEGORIE D

1. Vagony

Na nakloněné rovině se sklonem $\alpha = 1{,}7°$ se nachází zabrzděný vagon. Vagon odbrzdíme a po projetí dráhy $s_1 = 200\,\mathrm{m}$ zablokujeme brzdy tak, že se pohybuje smykem. Součinitel smykového tření mezi koly vagonu a kolejemi je $f = 0{,}10$.

a) Sestrojte graf závislosti velikosti rychlosti na čase.

b) Sestrojte graf závislosti dráhy na čase.

2. Cyklisté na uzavřené trati

Dva cyklisté jezdí po uzavřeném okruhu délky $o = 750\,\mathrm{m}$, jeden rychlostí $v_1 = 45\,\mathrm{km/h}$, druhý rychlostí $v_2 = 27\,\mathrm{km/h}$.

a) Oba vyrazili současně opačnými směry.

b) Oba vyrazili současně stejným směrem.

c) Oba vyrazili stejným směrem, ale pomalejší cyklista o $\tau = 12\,\mathrm{s}$ dříve.

Kdy a v jaké vzdálenosti od místa startu (měřeno podél okruhu) se setkají během prvních 5 minut jízdy rychlejšího cyklisty? Úlohu řešte graficky i početně.

3. Jízda v zatáčce

Při cyklistických závodech mají cyklisté projíždět protisměrnou zatáčkou, tj. zatáčkou se středovým úhlem 180°. Vozovka celé zatáčky leží ve vodorovné rovině.

a) Do zatáčky vjíždí dva cyklisté, jeden jede po kruhovém oblouku o poloměru r_1, druhý po kruhovém oblouku o poloměru r_2 ($r_1 < r_2$). Během průjezdu zatáčkou se oba cyklisté nachází v každém okamžiku vedle sebe. Rozhodněte, který z cyklistů je více odkloněn od svislé osy. Zdůvodněte.

b) Určete nejkratší dobu $t_{\min}$, za kterou je teoreticky možné zatáčkou projet, a maximální rychlost $v_{\max}$, kterou je možné zatáčkou projíždět. Zatáčku je možné projíždět po kruhových obloucích o minimálním poloměru $r_{\min} = 5{,}0\,\mathrm{m}$ a maximálním poloměru $r_{\max} = 9{,}0\,\mathrm{m}$. Součinitel smykového tření mezi pláštěm kola a vozovkou je $f = 0{,}60$. Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

4. Tenis

Při podání tenisty od základní čáry míček opouští raketu ve vodorovném směru kolmo ke svislé rovině sítě tak, že nejnižší bod míčku je ve výšce $h_0 = 2{,}50\,\mathrm{m}$ nad základní čarou. Síť výšky $h_1 = 0{,}91\,\mathrm{m}$ se nachází ve vzdálenosti $d_1 = 11{,}9\,\mathrm{m}$ od základní čáry, zadní čára pole podání je ve vzdálenosti $d_2 = 18{,}3\,\mathrm{m}$.

a) Určete velikost minimální počáteční rychlosti $v_{\min}$, aby míček přeletěl síť.

b) Určete velikost maximální počáteční rychlosti $v_{\max}$, aby míček dopadl do pole podání.

c) Tenista podával počáteční rychlostí o velikosti $v_0 = 56,0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\alpha = -6°30'$. Rozhodněte, zda míček přejde přes síť do pole podání.

d) Určete dobu letu míčku z úlohy c).

Úlohy řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Odpor vzduchu zanedbejte.

5. Padostroj

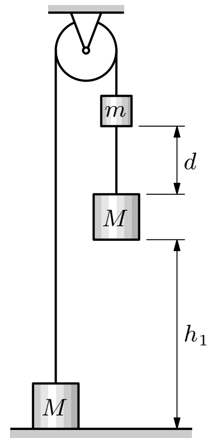
Přes kladku zajištěnou nejprve proti otáčení jsou na tenkém pevném vlákně zavěšena dvě stejná závaží o hmotnostech $M = 2{,}00\,\mathrm{kg}$. Levé závaží stojí na podlaze, pravé se nachází ve výšce $h_1 = 1{,}00\,\mathrm{m}$ nad podlahou. Nad pravým závažím ve vzdálenosti $d = 20\,\mathrm{cm}$ je další závaží o hmotnosti $m = 0{,}500\,\mathrm{kg}$ (obr. 1). Vlákno je s výjimkou kladky napnuté ve svislém směru. Kladku v určitém okamžiku uvolníme.

a) Jakou rychlostí dopadne pravé dolní závaží na podlahu?

b) Do jaké výšky vystoupí levé závaží poté, co pravé dolní závaží dopadne nepružně na podlahu?

c) Do jaké maximální výšky pak opět vystoupí pravé dolní závaží?

Hmotnost vlákna i kladky, deformaci vlákna tahem a tření zanedbejte.



Obr. 1

6. *Praktická úloha*:

Pohyb hladiny při výtoku kapaliny otvorem ve stěně nádoby

Vezměte plastovou láhev, která má mezi dnem a hrdlem stejný příčný průřez ve výškovém rozmezí aspoň 20 cm. V nejnižším bodě válcové části vytvořte pomocí hřebíku o průměru asi 2,5 mm zahřátého v plameni malý otvor. Na stěně válcové části vytvořte svislou stupnici v centimetrech s počátkem ve středu výtokového otvoru, která určuje výšku hladiny nad středem otvoru.

Naplňte láhev vodou a nechte ji vytékat. V okamžiku, kdy hladina dosáhne úrovně horního konce stupnice, začněte stisknutím stopek měřit čas. Optimální jsou stopky, které umožňují měřit mezičasy. Zaregistrujte časy průchodu hladiny každou ryskou, dokud voda tryská vodorovně a nestéká po stěně, a zapište je do tabulky. Toto celé měření proveďte 5krát.

Vyplňte zbývající část tabulky. V tabulce je $\overline{t}_i$ aritmetický průměr pěti naměřených časů, $\Delta t_i = \overline{t}_i - \overline{t}_{i-1}$ doba průchodu hladiny mezi dvěma sousedními ryskami, $t_i = \dfrac{\overline{t}_i + \overline{t}_{i-1}}{2}$ aritmetický průměr krajních časů intervalu Δt_i, $v_i = \dfrac{\Delta h}{\Delta t_i}$ průměrná rychlost pohybu hladiny mezi dvěma sousedními ryskami $(\Delta h = 0{,}01\,\mathrm{m})$.

i	$\frac{h}{\mathrm{m}}$	$\frac{t_{i1}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i2}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i3}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i4}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i5}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\bar{t}_i}{\mathrm{s}}$	$\frac{\Delta t_i = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_i = \frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i-1}}{2}}{\mathrm{s}}$	$\frac{v_i = \frac{\Delta h}{\Delta t_i}}{10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$
0	0,20	–	–	–	–	–	0	–	–	–
1	0,19									
2	0,18									
3	0,17									
4	0,16									
5	0,15									
6	0,14									
7	0,13									
8	0,12									
9	0,11									
10	0,10									
11	0,09									
12	0,08									
13	0,07									
14	0,06									
15	0,05									
16	0,04									
17	0,03									
18	0,02									
19	0,01									

Považujte nyní rychlost v_i za okamžitou rychlost v čase t_i a do grafu závislosti rychlosti na čase vyneste jednotlivé body. Body proložte přímkou a určete její směrnici.
Stanovte fyzikální význam hodnoty směrnice a napište závěr o charakteru pohybu hladiny v láhvi.

7. Dva automobily

Dva automobily, každý o hmotnosti $m = 1200\,\mathrm{kg}$, stojí vedle sebe a ve stejném okamžiku se začínají rozjíždět. První se rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $a = 1{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, druhý s konstantním výkonem $P = 20\,\mathrm{kW}$.

a) Určete čas t_1, v němž budou mít stejnou rychlost, a velikost této rychlosti v_1. Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.
b) Sestrojte pro každý automobil graf závislosti okamžité rychlosti na čase.
c) Z grafu přibližně určete maximální vzdálenost mezi automobily.