Jaromír Šimša
Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků, 2. část

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 80 (2005), No. 2, 5–16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146089

Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků, 2. část

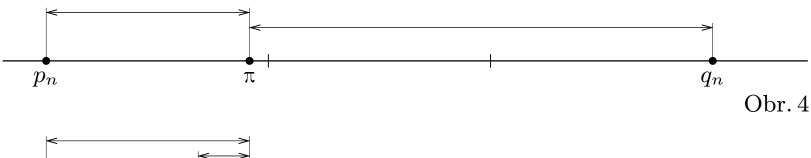
Jaromír Šimša, PřF MU Brno

4. Snellovy hypotézy

Někteří z matematiků, kteří se v 16. a 17. století zabývali výpočtem čísla π, přemýšleli o otázce, do jaké míry by bylo možné upřesnit, ve kterých částech intervalů $\langle p_n, q_n \rangle$ hledané číslo π leží. Znali totiž v tomto směru první nadějný výsledek, který ihned plyne z nerovností (7) dokázaných v první části článku:

Pro každé $n \geqq 3$ *je číslo* π *blíže číslu* p_n *než číslu* q_n*, leží tedy v první „polovině" intervalu* $\langle p_n, q_n \rangle$.

Tvrzení je ilustrováno na obr. 4 pro $n = 6$; levá vyznačená úsečka je natolik kratší než pravá úsečka, že číslo π leží v první „třetině" intervalu $\langle p_n, q_n \rangle$. Archimedovi následovníci mohli s poměrem $(q_n - \pi) : (\pi - p_n)$ délek těchto dvou úseček numericky experimentovat, neboť už znali přibližné hodnoty p_n a q_n pro desítky různých indexů n. Holanďan *Willebrord Snell* (1580–1626), kterého známe spíše z historie fyziky jako jednoho z objevitelů *zákona lomu světla*, podobně experimentoval nejen s poměrem $(q_n - \pi) : (\pi - p_n)$, ale také s poměrem $(\pi - p_n) : (\pi - p_{2n})$. Tento nový poměr délek úseček znázorněných na obr. 5 vlastně vyjadřuje, kolikrát se zkrátí rozdíl mezi obvodem kružnice a obvodem vepsaného pravidelného mnohoúhelníku, zdvojnásobíme-li počet jeho stran.



Obr. 4

Obr. 5

Zaokrouhlené hodnoty obou zmíněných poměrů jsou vypsány v tabulce 2 a působí velice výmluvně. W. Snell proto nabyl přesvědčení, že pro každé $n \geqq 3$ platí nerovnosti

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2 \qquad \text{a} \qquad \frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4,$$

které po „vyřešení“ vzhledem k neznámé π vedou k odhadům:

$$\tfrac{4}{3}p_{2n} - \tfrac{1}{3}p_n < \pi < \tfrac{2}{3}p_n + \tfrac{1}{3}q_n \quad (n \geqq 3) \tag{11}$$

Tyto odhady Snell uveřejnil roku 1621 ve své knize *Cyclometricus*, ovšem bez důkazů, tedy jako pouhé (i když velmi pravděpodobné) hypotézy.

n	$(q_n - \pi) : (\pi - p_n)$	$(\pi - p_n) : (\pi - p_{2n})$
3	3,780124407	3,838592105
6	2,277723832	3,959070818
12	2,063455534	3,989731318
24	2,015529592	3,997430550
48	2,003862049	3,999357495
96	2,000964248	3,999839364
192	2,000240983	3,999959840
384	2,000060240	3,999989960
768	2,000015059	3,999997504
1536	2,000003775	3,999999415
3072	2,000000984	3,999999843

Tabulka 2

O platnosti odhadů (11) patrně nikdo ze zainteresovaných osob tehdejší doby nepochyboval. Od vydání Snellovy knihy však uplynulo 33 let, než Christian Huygens v práci *De circuli magnitude inventa* z roku 1654 podal první skutečně přesný a nezpochybnitelný důkaz nerovností (11). Dříve než ho podrobně vyložíme, ukážeme pro zajímavost, kolik času mohly oboustranné odhady (11) ušetřit Viètovi, van Ceulenovi i všem ostatním „π-počtářům“ předchozích desetiletí a staletí. Hodnoty odhadů

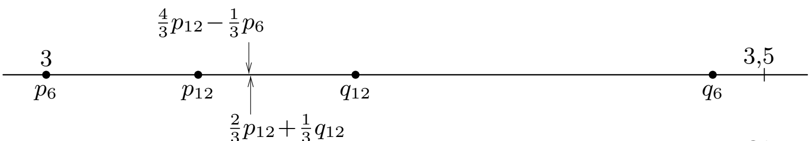
$$D(\pi) = \tfrac{4}{3}p_{2n} - \tfrac{1}{3}p_n \qquad \text{a} \qquad H(\pi) = \tfrac{2}{3}p_n + \tfrac{1}{3}q_n$$

jsou uvedeny v tabulce 3; porovnejte jejich „jemnost“ s původními odhady $D(\pi) = p_n$ a $H(\pi) = q_n$ z tabulky 1.

n	$\frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n$	$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$
3	3,1339745962155	3,4641016151377
6	3,1411047216403	3,1547005383792
12	3,1415619706315	3,1423491305446
24	3,1415907329687	3,1416390562199
48	3,1415925335050	3,1415955404083
96	3,1415926460837	3,1415928338087
192	3,1415926531206	3,1415926648502
384	3,1415926535604	3,1415926542935
768	3,1415926535879	3,1415926536337
1536	3,1415926535896	3,1415926535925

Tabulka 3

Působivé je též grafické porovnání obou druhů odhadů na obr. 6.

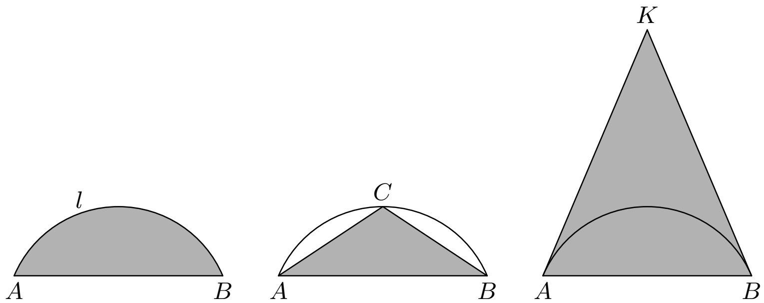


Obr. 6

Dodejme ještě, že díky odhadům (11) stačí k určení čísla π s přesností Ludolpha van Ceulena (tedy na 35 desetinných míst) vypočítat čísla p_n, q_n s touto přesností pro index $n = 2^{31}$, zatímco van Ceulen došel až k indexu $n = 2^{62}$. Možná by toto konstatování neznělo tak krutě, kdyby práce van Ceulena a Huygense oddělovaly stovky let a nikoliv pouhá čtyři desetiletí 17. století.

5. Huygensovy důkazy

Nyní popíšeme zajímavý a nevšední postup, jakým Huygens dokázal nerovnosti (11). Aby byl výklad přehlednější, zformulujeme nejdříve klíčový poznatek, od něhož nás ke kýženému cíli dovedou již poměrně jednoduché výpočty. Tímto poznatkem jsou nerovnosti mezi obsahem kruhové úseče a obsahy dvou rovnoramenných trojúhelníků, z nichž jeden je dané úseči vepsán a druhý je úseči opsán. Upřesníme to pomocí obr. 7, na němž vidíme tři exempláře téže kruhové úseče ohraničené úsečkou AB a obloukem $l = \widehat{AB}$ kružnice o poloměru R, kterému odpovídá středový úhel libovolné velikosti menší než 180°. Vrchol C *vepsaného* trojúhelníku ABC je střed oblouku l, vrchol K *opsaného* trojúhelníku ABK je průsečík tečen, které se dotýkají oblouku l v jeho krajních bodech A a B.

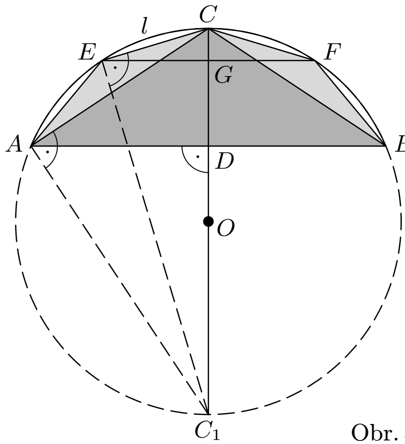


Obr. 7

Huygensovou důmyslnou metodou vysvětlíme, proč mezi obsahem S úseče a obsahy $S_{\triangle ABC}$ a $S_{\triangle ABK}$ obou trojúhelníků platí nerovnosti:

$$\tfrac{4}{3}\, S_{\triangle ABC} < S < \tfrac{2}{3}\, S_{\triangle ABK} \tag{12}$$

K důkazu levé nerovnosti (12) využijeme obr. 8, na kterém je oblouk l částí kružnice se středem O; bod D je středem tětivy AB a bod G středem rovnoběžné tětivy EF, jejíž krajní body E, F jsou středy oblouků AC, BC; konečně bod C_1 je bod souměrně sdružený s bodem C podle středu O.



Obr. 8

Podle trojúhelníkových nerovností platí:

$$|AB| < |AC| + |BC| = |EF| + |EF| = 2\,|EF|$$

$$|AC| < |AE| + |CE| = 2\,|CE|$$

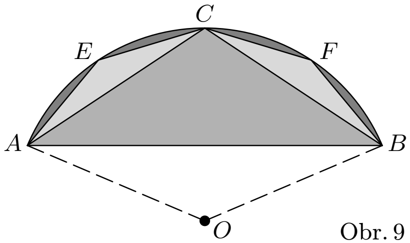
Jestliže druhou z těchto nerovností umocníme na druhou, pak s přihlédnutím k Eukleidově větě o odvěsně (pro pravoúhlé trojúhelníky CAC_1 a CEC_1) dostaneme

$$|CD| \cdot |CC_1| = |AC|^2 < 4\,|CE|^2 = 4\,|CG| \cdot |CC_1|,$$

odkud obdržíme nerovnost $|CD| < 4\,|CG|$. Ta spolu s dříve odvozenou nerovností $|AB| < 2\,|EF|$ umožňuje porovnat obsahy trojúhelníků ABC a EFC:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|AB| \cdot |CD|}{2} < \frac{2\,|EF| \cdot 4\,|CG|}{2} = 8\,S_{\triangle EFC} \qquad (13)$$

Trojúhelník EFC je však shodný s každým z rovnoramenných trojúhelníků ACE a CBF, které jsou vepsány do kruhových úsečí nad tětivami AC a CB stejným způsobem, jako je rovnoramenný trojúhelník ABC vepsán do původní úseče nad tětivou AB. Proto můžeme pro každou ze dvou nových úsečí celou konstrukci zopakovat a získat tím čtyři nové úseče, pro ně opět zopakovat konstrukci atd. (obr. 9). Výsledkem celé procedury bude rozklad původní úseče na spočetnou množinu trojúhelníků složenou ze skupin 1, 2, 4, 8, … shodných trojúhelníků.



Obr. 9

Označíme-li $S_0 = S_{\triangle ABC}$, $S_1 = S_{\triangle ACE} = S_{\triangle CBF}$ a obecně S_k obsah každého ze skupiny 2^k shodných vepsaných trojúhelníků, pak podle (13) platí nejen $S_0 < 8S_1$, ale obecně $S_k < 8S_{k+1}$ pro každé $k \geqq 0$. Obsah S původní výseče je roven součtu řady

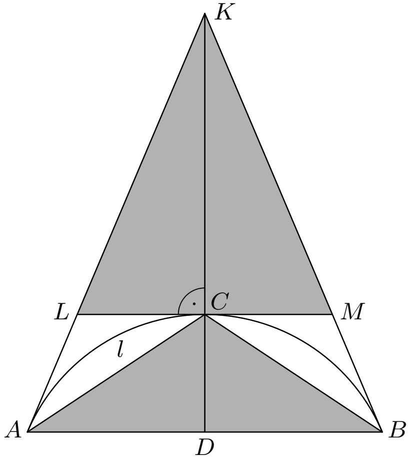
$$S = S_0 + 2S_1 + 4S_2 + 8S_3 + \cdots + 2^k S_k + \cdots,$$

ve které všechny sčítance kromě prvního odhadneme podle odvozených nerovností $S_{k+1} > \frac{1}{8} S_k$:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + 2S_1 + 2^2 S_2 + 2^3 S_3 + \cdots + 2^k S_k + \cdots > \\ &> S_0 + 2 \cdot \frac{S_0}{8} + 2^2 \cdot \frac{S_1}{8} + 2^3 \cdot \frac{S_2}{8} + \cdots + 2^k \cdot \frac{S_{k-1}}{8} + \cdots = \\ &= S_0 + \tfrac{1}{4} \left(S_0 + 2S_1 + 2^2 S_2 + 2^3 S_3 + \cdots + 2^k S_k + \cdots \right) = S_0 + \tfrac{1}{4} S \end{aligned}$$

Z nerovnosti $S > S_0 + \frac{1}{4} S$ vyplývá nerovnost $S > \frac{4}{3} S_0$ a levá nerovnost (12) je tak dokázána.

K důkazu pravé nerovnosti (12) sestrojíme příčku LM opsaného rovnoramenného trojúhelníku ABK, která je rovnoběžná s jeho základnou AB a dotýká se oblouku AB ve vrcholu C vepsaného rovnoramenného trojúhelníku ABC (obr. 10). Trojúhelník LMK nazveme *připsaným* k dané úseči nad tětivou AB.

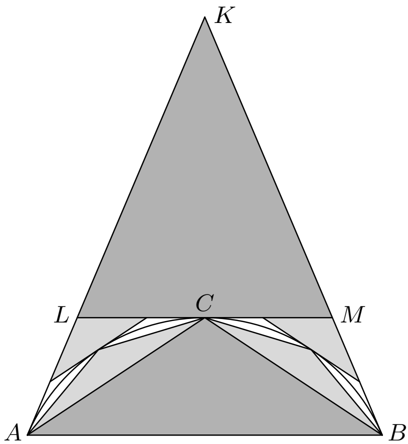


Obr. 10

Ze souměrnosti tečen LA a LC plyne rovnost $|AL| = |LC|$, z pravoúhlého trojúhelníku KLC zase nerovnost $|KL| > |LC|$. Platí tudíž $|KL| > |AL|$, neboli $2\,|KL| > |AK|$, takže pro obsahy stejnolehlých trojúhelníků ABK a LMK platí nerovnost $4\,S_{\triangle LMK} > S_{\triangle ABK}$. Z nerovnosti $|AL| < |LK|$ ovšem plyne i nerovnost $|CD| < |CK|$, neboli $|KD| > 2\,|CD|$, což je nerovnost pro výšky rovnoramenných trojúhelníků ABK a ABC se společnou základnou AB. Pro jejich obsahy tudíž platí nerovnost $S_{\triangle ABK} > 2\,S_{\triangle ABC}$, která spolu s dříve odvozenou nerovností $4\,S_{\triangle LMK} > S_{\triangle ABK}$ vede k závěru, že obsahy trojúhelníků, které jsou na obr. 10 vybarveny, splňují vztah $4\,S_{\triangle LMK} > 2\,S_{\triangle ABC}$, neboli $S_{\triangle ABC} < 2\,S_{\triangle LMK}$.

Které části opsaného trojúhelníku ABK zůstaly na obrázku nevybarveny? Jsou to dva shodné rovnoramenné trojúhelníky ACL a CBM, jež jsou opsány kruhovým úsečím nad tětivami AC a CB stejným způsobem, jako je trojúhelník ABK opsán původní úseči nad tětivou AB.

Proto můžeme znovu a znovu opakovat konstrukci vepsaných a připsaných trojúhelníků. Podobně jako jsme pro každé $k \geqq 0$ označili S_k obsah každého ze skupiny 2^k shodných vepsaných trojúhelníků $(S_0 = S_{\triangle ABC})$, označíme P_k obsah každého ze skupiny 2^k shodných připsaných trojúhelníků $(P_0 = S_{\triangle LMK})$.



Obr. 11

Pro obsah S původní kruhové úseče a pro obsah $S_{\triangle ABK}$ opsaného trojúhelníku platí podle obr. 11 rovnosti:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + 2S_1 + 4S_2 + 8S_3 + \cdots + 2^k S_k + \cdots \\ S_{\triangle ABK} - S &= P_0 + 2P_1 + 4P_2 + 8P_3 + \cdots + 2^k P_k + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

Každé dva sčítance na pravých stranách rovností (14), které jsou napsány „pod sebou“, můžeme porovnat. Jak jsme totiž dokázali, platí nejen nerovnost $S_{\triangle ABC} < 2\, S_{\triangle LMK}$, tedy $S_0 < 2P_0$, ale obecně $S_k < 2P_k$ pro každé $k \geqq 0$. To znamená, že součet první řady v (14) je menší než dvojnásobek součtu druhé řady. Platí tedy nerovnost $S < 2\,(S_{\triangle ABK} - S)$, ze které již snadno plyne pravá nerovnost (12).

Rozhodující část výkladu Huygensovy metody máme za sebou; ukažme nyní, že od dokázaných odhadů (12) se již poměrně rychle dostaneme k vytčenému cíli, totiž k nerovnostem (11).

Vraťme se k obr. 8 a využijme nejprve dolní odhad (12), ne však pro úseč nad tětivou AB, nýbrž pro úseč nad tětivou AC. (Připomeňme, že odhady (12) platí pro úseč s libovolným středovým úhlem menším než 180°.) Obsah S' úseče nad tětivou AC vyjádříme jako rozdíl obsahu příslušné kruhové výseče (omezené úsečkami AO, CO délky R a obloukem AC) a obsahu trojúhelníku ACO:

$$S' = \frac{R \cdot |\widehat{AC}|}{2} - \frac{R \cdot |AD|}{2} = \frac{R \cdot \left(|\widehat{AC}| - |AD|\right)}{2} \tag{15}$$

Do uvažované úseče nad tětivou AC je vepsán trojúhelník ACE, jehož obsah vyjádříme pomocí obsahu deltoidu $AECO$ (s úhlopříčkou EO délky R):

$$S_{\triangle ACE} = S_{AECO} - S_{\triangle ACO} = \frac{R \cdot |AC|}{2} - \frac{R \cdot |AD|}{2} = \frac{R \cdot (|AC| - |AD|)}{2}$$

Dosazením obou vyjádření do dolního odhadu $\frac{4}{3}\, S_{\triangle ACE} < S'$ dojdeme po snadné úpravě k nerovnosti

$$|\widehat{AC}| > \tfrac{4}{3}\,|AC| - \tfrac{1}{3}\,|AD|,$$

z níž po vynásobení dvěma dostaneme (díky symetrii podle osy CC_1) odhad

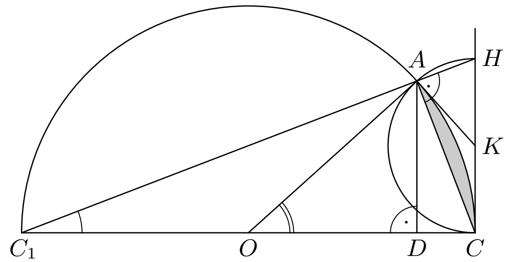
$$|\widehat{AB}| > \tfrac{4}{3}\,(|AC| + |CB|) - \tfrac{1}{3}\,|AB|.$$

Vybereme-li nyní za tětivu AB stranu pravidelného vepsaného n-úhelníku, budou AC, CB dvě sousední strany vepsaného $2n$-úhelníku a oblouk AB bude n-tinou celé kružnice o poloměru R. Proto po vynásobení číslem n dostaneme z poslední nerovnosti odhad

$$2\pi R > \tfrac{4}{3}\, p_{2n}(R) - \tfrac{1}{3}\, p_n(R),$$

což je pro $R = \frac{1}{2}$ levá nerovnost (11).

K důkazu pravé nerovnosti (11) využijeme horní odhad (12) pro úseč nad tětivou AC z obr. 12, ve kterém jsme kromě dříve uvažovaných bodů O, C_1, D vyznačili též hlavní vrchol K rovnoramenného trojúhelníku opsaného vybarvené úseči a bod H, který je průsečíkem polopřímek CK a C_1A.



Obr. 12

Podle Thaletovy věty je úhel CAC_1 (a tedy i úhel CAH) pravý, takže bod A leží na zakreslené polokružnici nad průměrem HC. Jejím středem je bod K, neboť trojúhelník ACK je rovnoramenný. Odtud plyne, že pro obsah deltoidu $AKCO$, který je dvojnásobkem obsahu pravoúhlého trojúhelníku KCO, platí vzorec

$$S_{AKCO} = |CO| \cdot |CK| = \tfrac{1}{2} R \cdot |HC|.$$

Obsah opsaného trojúhelníku ACK má tudíž vyjádření

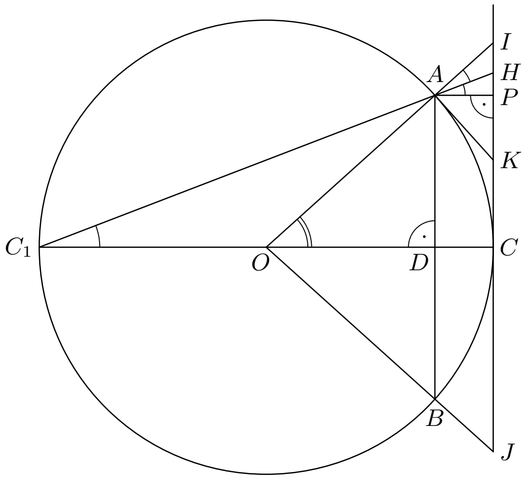
$$S_{\triangle ACK} = S_{AKCO} - S_{\triangle ACO} = \frac{R \cdot (|HC| - |AD|)}{2},$$

zatímco pro obsah S' uvažované úseče platí jako dříve vzorec (15). Po dosazení do odhadu $S' < \frac{2}{3}\, S_{\triangle ACK}$ dospějeme po snadné úpravě k nerovnosti

$$\left|\widehat{AC}\right| < \tfrac{1}{3}\,|AD| + \tfrac{2}{3}\,|HC|.$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost dvěma a využijeme-li jako dříve symetrie podle osy CC_1, dostaneme pro délku oblouku AB z obr. 13 horní odhad:

$$\left|\widehat{AB}\right| < \tfrac{1}{3}\,|AB| + \tfrac{4}{3}\,|HC| \tag{16}$$



Obr. 13

Do obr. 13 jsme přikreslili patu P kolmice sestrojené z bodu A k přímce HC a průsečíky I, J polopřímek OA, OB s tečnou HC. Význam bodů I, J je jasný. Je-li výchozí tětiva AB stranou vepsaného pravidelného n-úhelníku, je tečná úsečka IJ stranou opsaného pravidelného n-úhelníku. Pravá nerovnost (11) je proto důsledkem nerovnosti

$$\left|\widehat{AB}\right| < \tfrac{2}{3}\,|AB| + \tfrac{1}{3}\,|IJ|,$$

která vyplyne z dokázané nerovnosti (16), jakmile ukážeme, že platí

$$\tfrac{1}{3}\,|AB| + \tfrac{4}{3}\,|HC| < \tfrac{2}{3}\,|AB| + \tfrac{1}{3}\,|IJ|.$$

Provedeme to tak, že do poslední nerovnosti dosadíme vyjádření:

$$\begin{aligned} |AB| &= 2\,|PC| \\ |HC| &= |HP| + |PC| \\ |IJ| &= 2\,(|IP| + |PC|) \end{aligned}$$

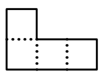
Po rutinní úpravě pak dostaneme ekvivalentní nerovnost $2\,|HP| < |IP|$, kterou vzhledem k tomu, že bod H leží mezi body I a P, můžeme přepsat do tvaru $|HP| < |HI|$, ve kterém ji nyní dokážeme. Protože středový úhel COA je shodný se souhlasným úhlem PAI a příslušný obvodový úhel CC_1A je shodný se souhlasným úhlem PAH, vidíme z obr. 13, že úsečka AH leží na ose úhlu PAI. Jak víme, osa úhlu dělí protější stranu trojúhelníku v poměru délek přilehlých stran, takže v pravoúhlém trojúhelníku PAI platí $|HP| : |HI| = |AP| : |AI| < 1$. Tím je nerovnost $|HP| < |HI|$ dokázána a celý důkaz odhadů (11) je ukončen.

Pokrývání šachovnice

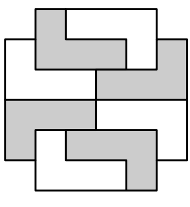
Emil Calda, MFF UK Praha

Úlohy o pokrývání šachovnice obrazci daného tvaru mohou být velice zajímavé a po matematické stránce i poučné. Můžete se o tom přesvědčit v následujících dvou příkladech.

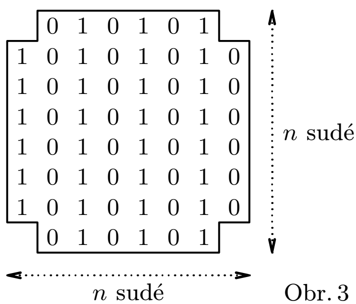
Příklad 1. Ze šachovnice $n \times n$, kde n je přirozené číslo, $n \geqq 3$, jsou odstraněna všechna čtyři rohová políčka. Určete, pro která n ji lze pokrýt obrazci, které se skládají ze čtyř shodných čtverečků podle obr. 1; každý čtvereček má přitom stejnou velikost jako políčko dané šachovnice.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3