Martina Štěpánová
Olga Taussky-Todd: z Olomouce do Pasadeny

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 61 (2016), No. 3, 197–213

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/145847

Olga Taussky-Todd: z Olomouce do Pasadeny

Martina Štěpánová, Praha

Abstrakt. V létě letošního roku uplynulo 110 let od narození celosvětově proslulé matematičky Olgy Taussky-Todd (1906–1995). Ač se narodila na území dnešní České republiky a krátce zde i žila, není paradoxně v naší širší matematické komunitě příliš známá. Její životní osud je přitom stěží uvěřitelnou cestou za sebeuplatněním a uznáním, leckdy únikem před ohrožením života, bojem s větrnými mlýny, ukázkou nezištné pomoci druhým či příběhem silné osobnosti, kterou řada překážek nezlomila, ale natolik posílila, že dokázala i ve svém profesním životě dosáhnout neobyčejných úspěchů.

1. Olomouc, Vídeň, Linec

Olga Taussky se narodila 30. srpna 1906 v Olomouci, ve městě, které bylo tehdy — v době Rakouska-Uherska — nazýváno Olmütz. Dětství prožila v láskyplné židovské rodině jako prostřední ze tří sester, mezi nimiž byly tříleté věkové rozdíly. Matka Ida Pollach Taussky nedosáhla vyššího vzdělání a byla v domácnosti, o niž se musela samostatně postarat zejména během častých pracovních cest manžela. Olga Taussky ji charakterizovala takto:

> *My mother was a country girl. She was rather bewildered about our studies and compared herself to a mother hen who had been made to hatch duck eggs and then felt terrified on seeing her offspring swimming in a pond.* [21, str. 321]

Olžin otec Julius David Taussky pracoval jako průmyslový chemik a občas psal články do novin. Dbal na to, aby dcery získaly kvalitní vzdělání, a přál si, aby se uplatnily v umělecké sféře. Všechny tři se však ve svých profesních životech vydaly zcela jiným směrem. Nejstarší Ilona vystudovala chemii a šla ve šlépějích svého otce, prostřední Olga se oddala matematice, především teorii matic a teorii čísel, a nejmladší Hertha se po studiích farmacie uplatnila ve funkci vědecko-výzkumné pracovnice v *Cornell Medical School* v New Yorku.

Krátce před svými třetími narozeninami se Olga ocitla ve Vídni, kam se celá rodina odstěhovala. Později zde začala docházet na základní školu. Tíhla v té době k umění a v matematice překvapivě nevynikala. Na rozdíl od starší sestry, která dostávala pouze jedničky, měla Olga občas i dvojky, a to i z matematiky. Především v pohnutých chvílích psala básně, což jí zůstalo až do důchodového věku, docházela na hodiny hudby a rovněž sama komponovala. Dokonce jí bylo navrženo, aby nastoupila na konzervatoř, k čemuž však nedošlo.

Sklony k přírodním vědám projevovala až od počátků dospívání. To však již bydlela v Linci, kam se rodina přestěhovala v roce 1916, aby řešila svou značně tíživou finanční

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky, MFF UK v Praze, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `stepanov@karlin.mff.cuni.cz`

situaci. Otec zde získal výhodnou pozici v místní octárně, která současně produkovala i marmelády, nealkoholické nápoje atd. Kvůli špatnému zdravotnímu stavu po úrazu při železničním neštěstí ho začala ke konci života na pracovních cestách doprovázet nejstarší dcera Ilona, a čerpala tak přirozeně znalosti chemie, kterou právě studovala.

Několik měsíců před Olžinou maturitou otec zemřel, a proto musela kvůli minimálním rodinným příjmům již během příprav na zkoušku z dospělosti začít pracovat v octárně.

Tou dobou se upnula ke své starší sestře Iloně a jak později pochopila, obdobný vztah pociťovala mladší sestra Hertha k ní. Velkou podporu nalezla Olga také v Rese, jejíž manžel byl kolegou jejího otce v octárně. Resa, která pocházela z Vídně a nebylo jí, tak jako jiným ženám obdobného věku, vzdělání umožněno, si nedokázala na osamělý život v relativně malém Linci zvyknout. Byla proto ráda, že mohla s Olgou dlouze debatovat. Kupovala jí kvalitní knihy, které by si Olga nemohla z finančních důvodů dovolit, a zajímala se o její školní výsledky.

Zajímavé je, že v říjnu roku 1918 se Olga Taussky stala dle zákona ze dne na den občankou nově vzniklého Československa. Ve svých pozdějších pamětech *An autobiographical essay* [21] uvedla, že sice považovala tento stát za zemi s význačnými možnostmi, krásnými horami, nádhernými starými městy a velkými ambicemi, ale pro ni to byla země, v níž takřka nežila.

Roku 1925 se její životní pouť opět stočila do Vídně, konkrétně na místní univerzitu. Nejdříve souběžně studovala chemii a matematiku, ale později pochopila, že chemické vzdělání ponechá pouze své sestře Iloně, a věnovala se plně matematice.

> *... when the summer was over it was decided to let me begin studies in mathematics at the University of Vienna, taking also a major in chemistry, a truly wonderful subject. Eventually, my sister did very well, making trips all over Europe, later to the U.S., and even to India and Egypt. I did not seem to be needed. So I dropped the chemistry – but my younger sister returned to the family subject later.* [21, str. 326]

Během studií se na kurzech z filozofie matematiky seznámila s brněnským rodákem Kurtem Gödelem (1906–1978), s nímž ji pojil nejen zájem o matematiku, ale i přátelství. Z odborných disciplín ji nejvíce zaujala teorie množin, z níž později (1930) získala i doktorát. Doktorskou práci psala v podstatě sama, neboť její školitel Philipp Furtwängler (1869–1940) byl natolik nemocný, že ani sám nedošel na univerzitu, nezvládal psát na tabuli, často odvolával (např. kvůli náledí) výuku či konzultace apod.

2. Göttingen, Vídeň, Bryn Mawr

Od roku 1931 pracovala Olga Taussky na univerzitě v Göttingen, kam se dostala na doporučení Hanse Hahna (1879–1934), školitele Kurta Gödela. Podílela se na editaci prací Davida Hilberta (1862–1943) z teorie čísel. Potkala se zde s Emmy Noether (1882–1935), s níž musela spolupracovat, ač mezi nimi byly napjaté vztahy. Kvůli výuce se věnovala další zcela odlišné oblasti matematiky než dosud — byla asistentkou v kurzech diferenciálních rovnic.

Zdejší působení ukončila již následujícího roku, kdy v obavě před sílícím fašismem Göttingen opustila a vrátila se do třetice do Vídně, opět na vídeňskou univerzitu. Ani zde se však necítila v bezpečí, a tak přibližně po dvou letech, v nichž se věnovala především funkcionální analýze a topologické algebře, odletěla roku 1934 na jeden rok do zámoří.

Dostala totiž nabídku z *Bryn Mawr College* v Pensylvánii. Odcházela však poněkud s lítostí, neboť poté, co přislíbila práci za oceánem, se dozvěděla, že by ji rovněž přijali na prestižní *Girton College* spadající pod *University of Cambridge*. Zde by se mohla věnovat vědním disciplínám, které by si sama zvolila, a rovněž její finanční ohodnocení by bylo nadstandardní. Jak to však v životě bývá, události, které se zprvu zdají negativní, se mohou časem vyjevit jako krok správným směrem. Na *Bryn Mawr College* se setkala s člověkem, který ji posunul nejen v kariéře. Onou osobou nebyl nikdo jiný než Emmy Noether. Jejich dřívější chladné vztahy se přetavily v přátelství, které bylo stmelováno společným jazykem (němčinou), židovským původem, postavením žen ve vědě či drobnostmi typu láska k čokoládě. Olga Taussky doprovázela Emmy Noether na jejích úterních pracovních cestách[1] do *Institute for Advanced Study* v Princetonu, kde tou dobou působili takoví velikáni, jako byl Albert Einstein (1879–1955), Hermann Weyl (1885–1955), John von Neumann (1903–1957), Solomon Lefschetz (1884–1972) apod. S nimi se nejen setkávala na chodbách, ale s některými přišla i do užšího kontaktu, neboť byla někdy s Emmy Noether přizvána na večeře. Možnost být v Princetonu v této vznešené společnosti přijímala s pokorou, nezapomínala na vlastní skromné začátky:

Although to me, since I came from poverty-stricken country, much of life at Bryn Mawr seemed quite luxurious. I had attended a European university and the attention students received practically brought tears to my eyes. I remembered the tough time I had in my student days. Nevertheless, life at that time was far from carefree. The depression was in full swing. … Some of the students in other subjects did not appear to be rolling in money; they could not afford to buy oranges to add to what the college provided, and I remember helping them carry their luggage to the station to avoid taxi fares. [21, str. 337]

3. Cambridge, Londýn, Belfast

O místo na *Girton College* v Cambridgi Olga Taussky nepřišla, nabízený tříletý pobyt jí však byl o jeden rok zkrácen. V Cambridgi pracovala v letech 1935 až 1937 především v oblasti topologické algebry. Ve své odborné činnosti zažívala stejný pocit jako při doktorském studiu: osamělost v oboru, kterému se nevěnoval žádný z bližších kolegů.

Poté ji život zavál přibližně o osmdesát kilometrů jižněji. Sedm let, tj. do roku 1944, byla zaměstnána na *Westfield College* v Londýně určené pro ženy. Působení v Cambridgi a Londýně mělo několik výrazných protikladů. V Cambridgi byla spokojena s úrovní školy, vycházela s kolegy a její cizí přízvuk v angličtině byl s pochopením tolerován. Naopak londýnskou školu nepovažovala za kvalitní a měla nesváry s kolegy, kteří mimo jiné poukazovali na její ne zcela dokonalou angličtinu. K podstatným negativům londýnské školy je nutno přičíst ještě skutečnost, že učila geometrii, která ji jednak nebavila, jednak se v ní necítila silná. Navíc ji učila pro velký počet studentů (devět skupin), kterým musela zadávat práce a hodnotit je, a rovněž měla pocit, že na ni geometrii přesunuli kolegové, kteří ji učit nechtěli.

[1] Kvůli vysoké ceně jízdenek na vlak si však nemohla dovolit jet každý týden.

Nespokojenost v akademickém životě však byla vyvážena štěstím osobním. Roku 1937 na jednom ze seminářů pro pedagogy londýnské univerzity potkala o pět let mladšího učitele matematické analýzy Johna Todda (1911–2007), familiárně zvaného Jack. Vyrůstal v presbyteriánské rodině v Severním Irsku jako nejstarší z pěti sourozenců.[2] Vedle matematické analýzy se později uplatnil především v numerické analýze, v numerické algebře a v oblasti vysokorychlostních počítačů. Na londýnskou univerzitu, konkrétně na *King's College*, přešel v roce 1937. Po onemocnění jednoho z kolegů byl Johnu Toddovi, jakožto nejmladšímu členu katedry, předán kurz z teorie grup. Při přípravě výuky se setkal s následujícím, pro něj neřešitelným problémem:[3] *Nechť G_2 je normální podgrupa grupy G_1 a G_3 je normální podgrupa grupy G_2. Pro jakou třídu grup je G_3 normální podgrupou grupy G_1?* S úlohou se obrátil na Olgu Taussky. Přestože ani ona mu tehdy nepomohla, postupně se sblížili. Již příští rok, pouze několik hodin poté, co Adolf Hitler, Édouard Daladier, Neville Chamberlain a Benito Mussolini zpečetili *mnichovskou dohodou* osud Československa, nasměrovali Olga s Johnem podpisem „*dohody manželské*“ dne 30. září 1938 svou cestu soukromou.[4]

Tou dobou již klepala na dveře druhá světová válka. Po jejím propuknutí byla *King's College*, na níž dosud působila mužská část matematického páru, evakuována do Bristolu. John Todd z ní byl propuštěn. Přestěhována, tentokrát do Oxfordu, byla rovněž část *Westfield College*, na níž působila Olga Taussky-Todd. Stěhování se stalo pro manžele Toddovy takřka synonymem jejich tehdejšího života, jen během války se stěhovali osmnáctkrát. Bydleli například v irském Belfastu, kde žila Johnova rodina.[5] Shodou náhod zde tehdy poblíž domova Johnových rodičů vyrůstal Hans Schneider (1927–2014), později jeden z nejvýznamnějších lineárních algebraiků druhé poloviny 20. století.[6] Oba manželé mimo jiné vyučovali na místní *Queen's University*.

Celosvětová situace měla přímý vliv rovněž na jejich odbornou práci, v níž bylo nutné řešit aktuální problémy související s válečným konfliktem. V letech 1943 až 1946 pracovala Olga Taussky-Todd na *Ministry of Aircraft Production* v Teddingtonu,

---

[2] Bližší informace o Johnu Toddovi lze získat např. z neformálních rozhovorů [1] a [26] z roku 1996. Druhé z uvedených interview s Johnem Toddem bylo vedeno Shirley K. Cohen v rámci tzv. *Oral History Project of the Caltech Archives*. Jednalo se o rozhovory s profesory působícími na *California Institute of Technology*.

Do tohoto projektu se zapojila i Olga Taussky-Todd, a to již na konci sedmdesátých let 20. století. Když byla požádána, aby promluvila o svém životě, preferovala psanou podobu vzpomínek, jejichž první, nepublikovaná verze vznikla v roce 1979. Přibližně třicetistránkový vzpomínkový text *An autobiographical essay* [21] byl roku 1980 upraven a vyšel opakovaně (1985, 2008). Právě z této publikace jsme čerpali biografické informace, pochází z něj řada uvedených citací.

[3] Podgrupa H grupy G je *normální*, jestliže pro každý prvek $h \in H$ a každý prvek $g \in G$ je $g^{-1}hg \in H$.

[4] V této souvislosti citujme úsměvnou historku Johna Todda ze soukromého života manželů, která se týká matky Harolda Scotta MacDonalda Coxetera (1907–2003):

Well, Olga was in Cambridge from 1935 to 1937, and Coxeter was there as a fellow of Trinity College, and they met. Mrs. Coxeter herself was also living there. Apparently she decided that her son should be married, and she thought that Olga was the right person for him, even after we were married. She even invited all of us to where she was living then in Tintagel, in Cornwall, the site of King Arthur's Castle. But she never succeeded. Olga and I would remain married for 57 years — until her death in 1995. [1, str. 21–22]

[5] Pouhý den před začátkem války se do Belfastu přestěhovala i Olžina matka a mladší sestra Hertha, které zde zůstaly rok či dva. Poté se přeplavily lodí přes Atlantický oceán (tehdy plný německých ponorek) za nejstarší sestrou Ilonou do New Yorku.

[6] Rovněž jeho kořeny sahají na naše území, neboť jeho otec se narodil v Karviné.

předměstí Londýna, v problematice související s tzv. jevem *flutter*[7]. Jedná se o nebezpečné vibrace nadzvukových letounů, které mohou vést až ke zřícení stroje a k obětem na životech.[8] Řešení problému úzce souvisí s problematikou diferenciálních rovnic, resp. s výpočtem vlastních čísel jistých matic. Olga Taussky-Todd si uvědomila, že není nutné vlastní čísla počítat přesně a postačí jejich určení s takovou přesností, kterou poskytuje tzv. *Geršgorinova věta* (viz věta 2 dále).

> *The duties in my aerodynamics job were very heavy. This time I really had to give up all my previous dreams. But there were some rewards. For the first time I realized the beauty of research on differential equations — something that my former boss, Professor Courant, had not been able to instill in me. Secondly, I learned a tremendous lot of matrix theory.* [21, str. 338]

Teorii matic se Olga Taussky-Todd věnovala i v rámci teorie čísel, kde studovala matice s celočíselnými prvky. Zajímala se též o zobecněnou komutativitu matic.

John Todd pracoval od roku 1941 na Ministerstvu námořnictva (*The Admiralty*) v Portsmouthu a zabýval se válečnými loděmi. Bylo je např. nutné demagnetizovat, aby nepřitahovaly německé magnetické miny. Potýkal se rovněž s problémem akustických lodních min, které byly spouštěny zvuky vydávanými plavidly.

Přestože se původní odborné zaměření manželů lišilo, napsali několik článků společně. Šest jich vzniklo dokonce přímo v krytech během bombardování Londýna, zatímco si jiných dvacet či třicet lidí povídalo, spalo nebo četlo. Většina z těchto článků byla z teorie matic.

4. Princeton, Los Angeles, Londýn, Washington, New York

V roce 1947 měli manželé Toddovi jeden rok pomáhat v začátcích nově založené společnosti *National Applied Mathematical Laboratories*, která vznikla v rámci *University of California* v Los Angeles (UCLA) a spadala pod *National Bureau of Standards* s centrálou ve Washingtonu. Vidina roku stráveného v Los Angeles se rozplynula ihned po příletu, neboť zjistili, že pro jejich práci není vybudováno zázemí. Olga Taussky-Todd proto pokračovala v samostudiu matic a příležitostně přednášela tam, kam ji pozvali. Na přednášky jezdila s určitou nejistotou, protože několik let před posluchači nestála. Klidu jí jistě nepřidalo ani vědomí, že hned na její druhé přednášce byl slavný nizozemský matematik Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996).

Při jedné cestě z takovéto přednášky se podívala na *Institute for Advanced Study* v Princetonu, který již v dobách, kdy na něj zajížděla s Emmy Noether, považovala za říši snů. Tehdy však netušila, že jí život přibližně o třináct let později přichystá milé překvapení. V Princetonu ji kolegové srdečně přijali, byli seznámeni s jejími výsledky. Protože se období, v němž neměli manželé Toddovi kde pracovat, stále prodlužovalo, požádali o dočasnou pozici právě v Princetonu. Žádosti bylo vyhověno, a tak Olga

[7]Do češtiny se někdy termín *flutter* překládal jako „třepání“ či „třepetání“ letounů; dnes se většinou nepřekládá. Více o jevu *flutter* lze nalézt na internetových stránkách (nezřídka včetně názorných ilustrací či videí).

[8]Příkladem takového pádu bylo neštěstí stroje *Lockheed L-188 Electra* ze dne 29. září 1959 při letu z Houstonu do Dallasu.

alespoň na krátkou dobu pracovala na místě, o němž by před lety ani v skrytu duše nesnila.

Poté se manželé vrátili za prací do Los Angeles a po několika měsících do Londýna, kde byli smluvně vázáni. Současně jim však byly opakovaně nabízeny pozice v USA. Když jim to situace umožnila, nabídku vyslyšeli a roku 1948 se po hektických měsících let 1947 a 1948 navrátili přímo do centrály *National Bureau of Standards* ve Washingtonu. Vedle své odborné práce (meze vlastních čísel, vlastní čísla součtů a součinů matic, matice s celočíselnými prvky) zde Olga Taussky-Todd zastávala funkci odborné poradkyně v matematice. Starala se o značný počet „postdoků“, recenzovala — dle jejích slov — každý článek, který kdy kdo z příslušné komunity napsal, musela odpovídat velkému množství korespondentů, a to i těm, kteří „vyřešili“ kvadraturu kruhu, apod.

Pomineme-li jednosemestrální pobyt manželů na *Courant Institute of Mathematical Sciences* na univerzitě v New Yorku v roce 1955, zůstali Toddovi ve Washingtonu do roku 1957.

5. Pasadena

Ve zmíněném roce 1957 se po dosavadním kolotoči stěhování a vyčerpávajícím zapracovávání na nových místech manželé Toddovi konečně definitivně usadili. Ve svých zhruba padesáti letech totiž přijali nabídku z Kalifornie, tentokrát z *California Institute of Technology* v Pasadeně, kde potom strávili zbytek života. Olga Taussky-Todd se na této škole, většinou zkráceně nazývané *Caltech*, stala první ženou na učitelské pozici, stejného prvenství dosáhla později (1971) i jako profesorka.

Na *Caltechu* se vrátila k typickému akademickému životu, k jeho výhodám i nevýhodám:

> *Of course, there is another thing that makes an academic surrounding so different from the civil service. That is the fixed hours in the civil service. In the evening or during weekends one can hardly return to one's research. At the university nobody gives you a fixed time schedule, apart from the fixed teaching schedule. So what happens is that one works practically all the time!* [21, str. 344]

Práce na Caltechu byla úzce svázána s teorií matic. V článku *How I became a torchbearer for matrix theory* [20], v němž popisuje podněty ke studiu matic, které k ní neustále a nečekaně přicházely, nazvala sama sebe *světlonošem teorie matic.*

> *Since my main subject was number theory, I did not look for matrix theory. It somehow looked for me.* [20, str. 801]

Teorii matic rovněž přednášela, nadchla pro ni řadu studentů. Pod jejím vedením obhájilo na Caltechu svou disertační práci třináct doktorandů.[9] Se studenty jezdila na výlety, trávila s nimi doma večery, nosila jim plody ze zahrady atd. Leckteří ji považovali za součást své rodiny. Přesto však u nich dokázala vzbudit respekt a úctu. Studenti na ni vzpomínají jako na náročnou, přísnou školitelku, která však neváhala pomoci.

[9] Olga Taussky-Todd byla ráda, že mezi nimi byly i dvě ženy.

Helene Shapiro, její předposlední doktorandka, o ní napsala několik článků. Citujme z textu [8] z roku 1997:

Over and over again, Olga presented delightful and fascinating theorems which linked together facts which I would not have guessed were related. The richness and variety of techniques and methods also fascinated me, as I began to see how linear algebra and matrix theory were used in so many areas of mathematics and how theorems and proofs in linear algebra come from many areas of mathematics. Olga once told us, "To get full insight into matrix theory is like finding roads in a jungle." [8, str. 21]

Ačkoliv to na první pohled nevypadá, jsou po Olze Taussky-Todd pojmenovány dvě třídy matic: ω-*matrices* a τ-*matrices*. V řeckých písmenech ω a τ jsou zašifrované její iniciály (**O**mega, **T**au). Toto pojmenování zavedl výše zmíněný Hans Schneider. Šifru použil z opatrnosti, neboť si nebyl jist, zda tyto třídy matic budou v budoucnosti významné. Opak však byl pravdou, a proto Hans Schneider později litoval své nesmělosti.[10]

Jako editorka pracovala Olga Taussky-Todd pro dnes zřejmě nejvýznamnější časopisy věnované lineární algebře: *Linear Algebra and its Applications* (1968–1995)[11] a *Linear and Multilinear Algebra* (1972–1992). Editorskou činnost vyvíjela v letech 1969 až 1995 rovněž pro časopis publikující články z její druhé nejoblíbenější matematické disciplíny, pro *Journal of Number Theory*.

Získala řadu ocenění. Za všechny jmenujme (v chronologickém pořadí) alespoň titul *Woman of the Year* obdržený od novinového deníku Los Angeles Times (1963), *Ford Prize* od Americké matematické asociace (1971), *Kříž cti pro vědu a umění* od rakouské vlády (1978) či tzv. *zlatý doktorát* (1980) od vídeňské Alma Mater.

Oceněním její práce je jistě i vydání speciálních svazků [5], [3] a [4] časopisů *Linear Algebra and its Applications* a *Linear and Multilinear Algebra*, které byly publikovány v letech 1975, 1976, 1998 a věnovány přímo Olze Taussky-Todd. V posledním z nich je uveden seznam jejích publikací, souhrn prací napsaných o ní, strukturovaný životopis, přehled doktorandů, seznamy ocenění, ediční činnosti atd.

Olga Taussky-Todd žila matematikou, speciálně čísly. Psala o nich básně, nosila šaty s číslicemi. Zemřela doma v Pasadeně ve spánku dne 7. října 1995, tj. necelý rok před svými devadesátými narozeninami, na následky zlomeniny kyčle.

Vraťme se nyní ještě krátce ke vztahu mezi Olgou Taussky-Todd a Československem.[12] Je jisté, že naše území, konkrétně Prahu, v dospělosti navštívila. Tuto skutečnost potvrdíme slovy Olgy Pokorné (1926–2015), bývalé docentky *Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy*:

[10] Hans Schneider byl Olze Taussky představen již v Belfastu (viz výše); příležitostně se setkávali během svých úspěšných a dlouhých kariér. Napsal o ní dokonce dva články: *Olga Taussky-Todd's influence on matrix theory and matrix theorists* [9] a *Some personal reminiscences of Olga Taussky-Todd* [10].

[11] Roku 1968 patřila mezi jeho zakládající editory. Jedním z dalších byl Hans Schneider.

[12] Dokladem skutečnosti, jak je svět malý, je další překvapivé pojítko mezi Toddovými a naším územím: John Todd a Arthur Erdélyi (1908–1977) publikovali roku 1946 v časopise *Nature* článek *Advanced instruction in practical mathematics*. Během spolupráce vyšlo najevo, že Arthur Erdélyi byl při pobytu v Československu (studoval v Brně, neboť ve svém rodném Maďarsku měl — jakožto Žid — minimální naděje na kvalitní vzdělání) podnájemníkem tety Olgy Taussky-Todd.

Když jsme se dověděli, že se naše pracoviště … mají přestěhovat na Malostranské náměstí, byli jsme dost rozčarováni.

Z tichého Karlova jsme se měli ocitnout na rušném náměstí. Ale ukázalo se, že jsme se — zejména my, „numerici“, obávali zbytečně … my, kteří jsme měli okna do dolní části náměstí, jsme měli přes protilehlé nižší domy krásný výhled na velkou část Prahy. Naši občasní hosté bývali tím pohledem přímo okouzleni — například profesorka Taussky-Todd díky tomu pohledu prohlásila naši pracovnu za nejkrásnější v Evropě a tvrdila, že se tam při každé návštěvě Prahy musí vrátit. [7, str. 128]

6. Odborná práce

Již z výše uvedeného životopisu je zřejmé, že rozsah matematických oborů, v nichž Olga Taussky-Todd pracovala nebo které vyučovala, je značný. Dle seznamu jejích publikací, který byl sestaven po její smrti s pomocí Johna Todda a je uveden ve speciálním svazku [4] časopisu *Linear Algebra and its Applications*, publikovala 236 odborných prací (některé prameny však uvádějí až 300 prací), a to především z teorie matic a teorie čísel, dále potom z teorie asociativních algeber, historie matematiky, teorie algebraických polí, teorie grup či numerické analýzy. Jejím velkým přínosem byla schopnost objevovat souvislosti mezi jednotlivými disciplínami, k čemuž jí jistě pomohla neskutečná znalost literatury z různých oborů.

Jelikož je nemožné na několika stránkách představit veškerou odbornou práci Olgy Taussky-Todd, věnujme se alespoň teorii, v níž dosáhla největšího ohlasu a v níž publikovala největší množství prací, tj. teorii matic.[13] Konkrétněji se zaměříme na ty oblasti, které nemají přesah do jiných oborů, tj. využívají převážně jen vlastnosti maticového aparátu. Některé konkrétní výsledky uvedeme především u témat (Geršgorinovy kruhy, Kacovy matice), která lze zařadit i do základního kurzu lineární algebry na vysoké škole.

Olga Taussky-Todd often said that number theory was her first love, but in many ways she had the greater impact on her second love: matrix theory. She was involved with many of the major themes of twentieth century research in matrix theory, and the vast majority of her Ph.D. students were in matrix theory, several being major developers of the field in the latter half of the century. [6, str. 839][14]

Zájem o maticový aparát začala Olga Taussky-Todd projevovat ve válečných letech.

At this time I heard about the so-called Gershgorin circles attached to a matrix with complex numbers as entries … I became immediately extremely interested in them and hoped to use them in the flutter work where one has to test a matrix for stability. I would not say that they are an ideal practical tool for this purpose,

[13] Dle údajů z [4, str. 25] spadá — podle Mathematics Subject Classification — 37 % jejích publikací pod sekci *lineární algebra* (zahrnující teorii matic) a 21 % pod *teorii čísel.* Ostatní obory dosahují 10 či méně procent.

[14] Jedná se o slova Charlese Johnsona, jednoho z doktorandů Olgy Taussky-Todd a později spoluautora (s Rogerem Hornem) celosvětově známých monografií *Matrix Analysis* (1985, 1990, 2013) a *Topics in Matrix Analysis* (1991).

but they certainly have a great many uses, and I can say that I stimulated much research concerning them, while I myself did not pursue them further after some initial achievements. [21, str. 338]

Problematika Geršgorinových kruhů vychází z věty o determinantu diagonálně dominantní matice, což je čtvercová komplexní matice řádu n, jejíž všechny prvky na hlavní diagonále jsou v absolutní hodnotě větší než součet absolutních hodnot zbývajících prvků na stejném řádku, tj. $|a_{ii}| > A_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, kde $A_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.[15] Tomuto tématu je věnována práce *A recurring theorem on determinants* [14] z roku 1949, která se proslavila i v dalších generacích lineárních algebraiků.

Věta 1. *Jestliže je A matice diagonálně dominantní, potom* $\det A \neq 0$.

Věta sice byla známá již několik desetiletí, avšak první jednoduchý důkaz podala Olga Taussky-Todd až ve zmíněném článku [14], čímž odstartovala nevídaný zájem o tuto otázku, který trvá v podstatě dodnes. Jednalo se o důkaz sporem. Předpokládala, že diagonálně dominantní matice A je singulární. Potom má homogenní soustava lineárních rovnic s maticí A netriviální řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a mezi indexy $i = 1, \ldots, n$ existuje index r, pro který je $|x_i|$ maximální. Z r-té rovnice soustavy potom plyne

$$|a_{rr}|\,|x_r| \leq \sum_{k=1,\, k\neq r}^{n} |a_{rk}|\,|x_k| \leq A_r\,|x_r|\,.$$

Tedy $|a_{rr}| \leq A_r$, což je spor s předpokladem.

Aplikací věty na charakteristický polynom $\det(A - \lambda I)$ matice A získáme elegantní omezení pro vlastní čísla matice A. Protože determinant matice $A - \lambda I$, kde λ je vlastní číslo matice A a I jednotková matice příslušního řádu, je nulový, musí existovat alespoň jeden index i, pro který $|a_{ii} - \lambda| \leq A_i$. Využijeme-li bijektivního zobrazení, které každému komplexnímu číslu $a + b\mathrm{i}$ přiřazuje bod Gaussovy roviny o souřadnicích $[a, b]$, a geometrickou interpretaci absolutní hodnoty čísla, dostáváme tzv. *Geršgorinovu větu*:[16]

Věta 2. *Nechť $A = (a_{ij})$ je komplexní matice řádu n. Potom všechna její vlastní čísla leží v oblasti*

$$\Gamma(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i,$$

kde Γ_i jsou kruhy v komplexní rovině o středu a_{ii} a poloměru r_i, který se rovná součtu absolutních hodnot prvků ležících v i-tém řádku s výjimkou prvku a_{ii}.

Kruhy se nazývají *Geršgorinovy* a jejich sjednocení *Geršgorinova množina*, případně *Geršgorinova oblast matice A*.

---

[15] Někdy se tato matice nazývá *ostře* (případně *silně*) *diagonálně dominantní* a v definici diagonálně dominantní matice se požadují pouze neostré nerovnosti $|a_{ii}| \geq A_i$, $i = 1, \ldots, n$.

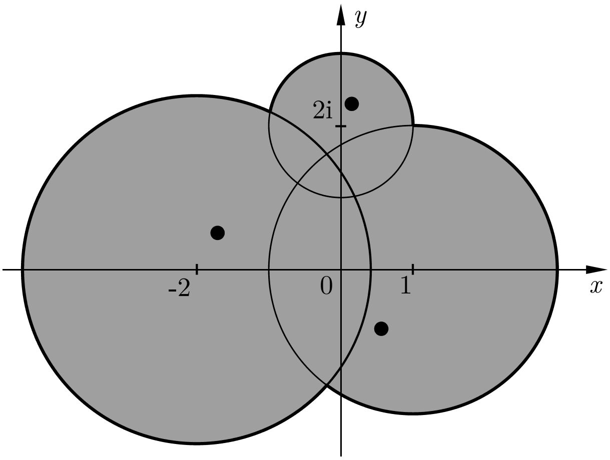
[16] Název věty odkazuje na Semjona Aronoviče Geršgorina (1901–1933), který tento výsledek představil roku 1931 v článku *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix* [2]. Nutno však podotknout, že práce [2] obsahuje poměrně podstatnou chybu.

Jelikož součty A_i hrají ve větě roli poloměrů kruhů, jsou přeznačeny na r_i.

Na následujícím obrázku je znázorněna Geršgorinova množina matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & 2\mathrm{i} & 0 \\ -1+\mathrm{i} & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla ($\lambda_1 \approx 0{,}15 + 2{,}31\mathrm{i}$, $\lambda_2 \approx -1{,}71 + 0{,}51\mathrm{i}$, $\lambda_3 \approx 0{,}56 - 0{,}82\mathrm{i}$) jsou zakreslena černými kroužky.



Obr. 1. Geršgorinova množina matice

V článku Olga Taussky-Todd rovněž mimo jiné představila mírnou modifikaci věty 1 pro tzv. *ireducibilní matici. Ireducibilní* neboli *nerozložitelnou maticí* rozumíme čtvercovou komplexní matici, kterou nelze simultánními permutacemi řádků a sloupců převést na tvar

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

kde A_1 a A_2 jsou čtvercové matice řádu alespoň jedna a O je nulová matice.

Věta 3. *Jestliže je $A = (a_{ij})$ ireducibilní matice řádu n, pro kterou $|a_{ii}| \geq A_i$, $i = 1, \dots, n$, přičemž rovnost $|a_{ii}| = A_i$ platí v nejvýše $n-1$ případech, potom* $\det A \neq 0$.

V připojeném důkazu doložila, že při povolení rovností v maximálně $n-1$ případech je požadavek ireducibility opravdu nezbytně nutný. Věta byla již před rokem 1949 několikrát publikována, avšak bez uvedeného předpokladu, a tedy chybně.

V dvoustránkové poznámce *Bounds for characteristic roots of matrices* [13] se paradoxně již o rok dříve (tj. roku 1948) věnovala především speciálnímu případu Geršgorinových kruhů pro $n = 2$. V práci formulovala a dokázala pro matice druhého řádu, jejichž Geršgorinovy kruhy nedegenerují na bod, následující dvě věty:

Věta 4. *Společný bod dvou Geršgorinových kruhů matice, který není jejich společným hraničním bodem, nemůže být vlastním číslem této matice.*

Věta 5. *Dvojnásobné vlastní číslo nemůže být společným hraničním bodem dvou Geršgorinových kruhů, jestliže se kruhy nedotýkají a nemají tentýž poloměr.*

Problematice Geršgorinových kruhů se věnovala i ve svém slavném článku *How I became a torchbearer for matrix theory* [20]. Představila velice jednoduchou metodu zpřesnění Geršgorinovy množiny založenou na notoricky známé skutečnosti, že matice A a $C^{-1}AC$, kde C je regulární matice příslušného řádu, mají stejná vlastní čísla, a tedy stačí vhodně volit matice C_k, obdržet různé Geršgorinovy množiny matic $C_k^{-1}AC_k$ a poté uvažovat jejich průnik, v němž musí ležet všechna vlastní čísla matice A. Při speciální volbě matice C zůstávají středy Geršgorinových kruhů na místě a mění se pouze jejich poloměry. Postačí za C uvažovat matici, která se od jednotkové matice liší pouze v jediném prvku na diagonále, kde má místo jedničky vhodný nenulový prvek.[17]

Další krásy maticového počtu nalezla Olga Taussky-Todd u matic, které mají tzv. *vlastnost* L či P. Nechť A a B jsou dvě komplexní matice téhož řádu n s vlastními čísly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Matice A a B *mají vlastnost L*, jestliže pro libovolnou[18] volbu koeficientů a, b mají vlastní čísla matice $aA + bB$ tvar $a\alpha_i + b\beta_i$, $i = 1, \ldots, n$ (při vhodném pořadí vlastních čísel α_i a β_i).

Uvažujme komplexní matice $A_1, A_2, \ldots, A_t$, $t \geq 2$, téhož řádu n. Dále nechť α_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, značí i-té vlastní číslo matice A_j a $p(X_1, X_2, \ldots, X_t)$ je libovolný maticový polynom proměnných $X_1, X_2, \ldots, X_t$, které ne nutně komutují.[19] Říkáme, že matice $A_1, A_2, \ldots, A_t$ *mají vlastnost P*, jestliže vlastními čísly matice $p(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ jsou hodnoty $p(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{it})$, $i = 1, \ldots, n$ (při vhodném pořadí vlastních čísel α_{ij}).

Dvě matice, které mají vlastnost P, tedy mají i vlastnost L, opačná implikace však obecně neplatí.[20]

Uvažujme speciálně horní trojúhelníkové komplexní matice $A_1, A_2, \ldots, A_t$, $t \geq 2$, téhož řádu n. Vlastní čísla trojúhelníkových matic leží na jejich diagonálách. Prvky na diagonále součtu, resp. součinu dvou horních trojúhelníkových matic jsou rovny součtu, resp. součinu příslušných prvků na diagonálách původních matic. Obdobná vlastnost platí rovněž pro skalární násobek horní trojúhelníkové matice. Výsledkem je vždy horní trojúhelníková matice. Pro libovolný polynom p proto i-tý prvek na diagonále matice $p(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ je $p(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{it})$ a horní trojúhelníkové matice $A_1, A_2, \ldots, A_t$ mají vždy vlastnost P.

Také v případě, kdy matice $A_1, A_2, \ldots, A_t$ nejsou nutně horní trojúhelníkové, avšak existuje regulární matice C taková, že matice $C^{-1}A_1C, C^{-1}A_2C, \ldots, C^{-1}A_tC$

[17] Některé další vlastnosti Geršgorinových kruhů (včetně příkladů a obrázků) viz [12]; historie Geršgorinovy věty viz [11].

[18] Olga Taussky-Todd koeficienty a, b blíže nespecifikovala; v současných publikacích jsou běžně uvažovány koeficienty komplexní.

[19] Přesněji řečeno ne všechny dvojice matic nutně komutují.

[20] Z vlastnosti L plyne vlastnost P jen pro matice druhého řádu. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

třetího řádu mají vlastnost L, ale nemají vlastnost P (matice AB má vlastní čísla $1, -1, 0$). Tento konkrétní příklad byl převzat z [22, str. 113].

horní trojúhelníkové jsou (matice $A_1, A_2, \ldots, A_t$ jsou tzv. *simultánně triangularizovatelné*), lze nalézt takové pořadí vlastních čísel matic $A_1, A_2, \ldots, A_t$, že pro libovolný polynom p jsou vlastními čísly matice $p(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ hodnoty $p(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{it})$. Simultánně triangularizovatelné matice tedy mají také vlastnost P. Tzv. *McCoyova věta*, kterou byla Olga Taussky-Todd okouzlena, zahrnuje i implikaci opačnou.

Věta 6. *Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_t$, $t \geq 2$, je množina komplexních čtvercových matic téhož řádu. Potom jsou tyto matice simultánně triangularizovatelné právě tehdy, když mají vlastnost P.*

Řadu textů z této oblasti publikovala Olga Taussky-Todd spolu s izraelsko-americkým matematikem Theodorem Samuelem Motzkinem (1908–1970), některé napsala samostatně. Spoluautorkou byla například u dvou stejnojmenných prací *Pairs of matrices with property L* [22], [23] či příspěvku *Pairs of matrices with property L (II)* [24], naopak článek *Commutativity in finite matrices* [15] nese pouze její jméno. Ve všech případech se jedná o texty z padesátých let.

V padesátých a v první polovině šedesátých let se Olga Taussky-Todd zabývala rovněž Ljapunovovou teorií. Problematika je úzce spojena s lineárními diferenciálními rovnicemi a v této souvislosti byla studována již na konci 19. století. Olga Taussky-Todd přistoupila k uvedené otázce s pomocí maticového aparátu, využila stabilitu matic. Komplexní čtvercovou matici nazýváme *stabilní*, jestliže všechna její vlastní čísla mají zápornou reálnou část, tj. odpovídají bodům Gaussovy roviny, které leží nalevo od imaginární osy. Nejedná se tedy opět o nic jiného než o lokalizaci vlastních čísel matice.

Z publikací Olgy Taussky-Todd zasvěcených této otázce jmenujme *A remark on a theorem of Lyapunov* [17] a *A generalization of a theorem by Lyapunov* [16] z počátku šedesátých let.

Tehdy známou maticovou verzi Ljapunovovy věty, která podává kritérium stability matice, uvedla v článku [17] přibližně v této podobě:

Věta 7. *Nechť A je reálná čtvercová matice. Potom A je stabilní právě tehdy, když existuje reálná symetrická pozitivně definitní matice H taková, že $AH + HA^T = -I$.*

Olga Taussky-Todd dokázala Ljapunovovu větu zobecnit. Toto zobecnění se často nazývá *teorie setrvačnosti* a zahrnuje v sobě i známý Sylvesterův zákon setrvačnosti.

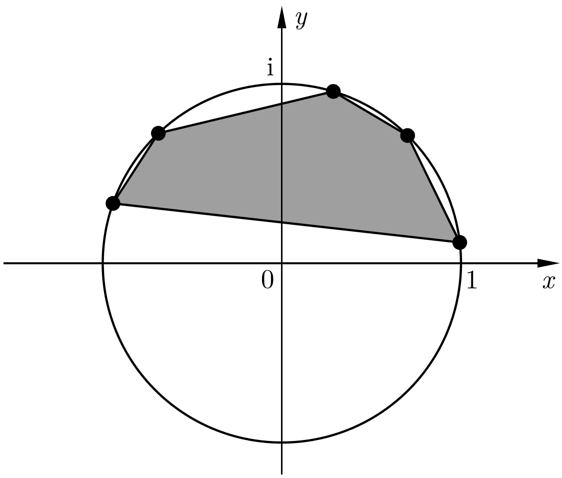
Další významnou oblastí, k níž Olga Taussky-Todd přispěla, je komutativita matic. Studovala například tzv. *komutátory matic A a B*, tj. matice $AB - BA$ (aditivní případ) a $ABA^{-1}B^{-1}$ (multiplikativní případ). Je zřejmé, že pro komutující matice A, B je $AB - BA = O$ a $ABA^{-1}B^{-1} = I$. Komutátory tedy ukazují, laicky řečeno, „jak hodně či málo matice A a B komutují“ (dle odlišnosti komutátoru od matic O či I). Když Olga Taussky-Todd psala roku 1961 článek *Commutators of unitary matrices which commute with one factor* [18], bylo známo následující tvrzení:

Věta 8. *Nechť $C = ABA^{-1}B^{-1}$ je komutátor unitárních matic A a B. Předpokládejme, že vlastní čísla matice B leží na oblouku jednotkové kružnice, který má délku menší než π. Potom $AC = CA$ implikuje $AB = BA$.*

Olgu Taussky-Todd zajímalo, jaké mají matice A a B struktury, jestliže komutují. Odpověď podala a své tvrzení dokázala ve zmíněné práci [18].

Uvědomme si, že součet prvků na diagonále komutátoru $AB - BA$ matic A a B je nulový. Jedná se tedy o reprezentanta třídy matic s nulovou stopou. Rovněž tyto matice Olga Taussky-Todd studovala, v roce 1962 publikovala článek s jasným názvem *Matrices with trace zero* [19].

Uvedením předchozí věty jsme se přirozeně dostali k další tematice, která je spojena se slavnou matematičkou, a tou jsou tzv. „*cramped matrices*“. Jedná se o speciální případ unitárních matic, o nichž je dobře známo, že absolutní hodnoty všech jejich vlastních čísel jsou 1, a proto leží v Gaussově rovině na jednotkové kružnici. Pokud má navíc oblouk kružnice, na němž leží, délku menší než π (oblouk menší než půlkružnice), jedná se o matici nazývanou „*cramped*“ („*stísněná*“). Lze ji definovat také pomocí jejího *pole hodnot*, tj. množiny $\mathcal{F}(A) = \{x^*Ax; x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\}$, kde $\mathbb{C}^n$ je n-dimenzionální aritmetický vektorový prostor nad polem komplexních čísel a x^* značí vektor transponovaný a komplexně sdružený k vektoru x. Pro unitární matici A je známo, že její pole hodnot je konvexní obal vlastních čísel matice. Unitární matice A je tedy „stísněná“, jestliže číslo 0 neleží v poli hodnot $\mathcal{F}(A)$.



Obr. 2. Vlastní čísla a pole hodnot „stísněné“ matice

Olga Taussky-Todd se věnovala rovněž nezáporným maticím (Perronova–Frobeniova teorie), maticím s celočíselnými prvky či Hilbertovým maticím (prvky Hilbertovy matice H jsou zavedeny vztahem $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$; prvky inverzní matice H^{-1} jsou celá čísla). Známým se stal také tzv. *Taussky Unification Problem*, předložený matematičkou v roce 1958. Zabývá se otázkou společných či naopak odlišných vlastností tří jistých tříd matic.

Nakonec se věnujme problematice, kterou Olga Taussky-Todd studovala ve své poslední práci *Another look at a matrix of Mark Kac* [25]. Publikovala ji se svým manželem v roce 1991 ve svých pětaosmdesáti letech. Týká se tzv. *Kacových matic*. Kacova matice K_n je čtvercová matice řádu $n+1$, která má úzkou souvislost s kombinatorikou.[21] Její prvky k_{ij} jsou definovány takto (uvažujeme přitom indexy $0, 1, \ldots, n$ místo obvyklejšího značení $1, 2, \ldots, n+1$):

$$k_{ij} = \begin{cases} j, & \text{jestliže } i = j-1, \\ n-j, & \text{jestliže } i = j+1, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Například matice K_4 je matice řádu pět tvaru

$$K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V práci předložili manželé Toddovi důkaz následující věty polsko-amerického matematika Marka Kace (1914–1984):

Věta 9. *Vlastní čísla Kacovy matice K_n jsou $\pm n$, $\pm(n-2)$, …, přičemž řada končí ± 1, jestliže je n liché, nebo ± 2, 0, jestliže je n sudé.*

Vlastní čísla Kacovy matice jsou navzájem různá, její Jordanův kanonický tvar je diagonální matice a příslušná Jordanova báze je tvořena $n+1$ vlastními vektory. Mezi vlastními vektory příslušnými danému vlastnímu číslu vyberme takový, jehož první složka je 1. Manželé v příspěvku dokázali, že pro regulární matici C, jejíž sloupce jsou tyto vlastní vektory, platí $C^2 = 2^n I$. Další překvapivá vlastnost matice C je, že současně vyhovuje vztahům $CK_n = JC$ i $K_nC = CJ$, kde J je Jordanův kanonický tvar matice K_n.

Vraťme se však k důkazu věty 9. Ten, který předložili manželé Toddovi, by totiž měli zvládnout i vysokoškolští studenti v základním kurzu lineární algebry! V podstatě stačí jen vhodně upravit jeden determinant řádu $n+1$, a tím zjistit vztah[22] mezi determinanty matic $K_n - \lambda I$ a $K_{n-1} - (\lambda+1)I$.

Vyjádříme $\det(K_n - \lambda I)$ a provedeme následující úpravy. K prvnímu řádku determinantu přičteme všechny zbývající řádky a poté první sloupec odečteme od všech ostatních sloupců. Determinant rozvineme podle prvního řádku (tím snížíme jeho řád) a k novému prvnímu řádku přičteme všech $n-1$ řádků pod ním, k novému druhému řádku přičteme všech $n-2$ řádků pod ním atd. Nakonec odečteme postupně od všech sloupců (s výjimkou prvního) sloupec jemu předcházející. Postupně tedy dostáváme

[21] Konkrétněji například s přemisťováním n různých míčků mezi dvěma osudími, přičemž v každém kroku přeneseme jediný míček.

[22] Toddovi dokonce provedli úpravy jen pro konkrétní n, odvodili vztah mezi determinanty matic $K_3 - \lambda I$ a $K_2 - (\lambda+1)I$.

$$
\det(K_n-\lambda I)=\begin{vmatrix}
-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
n & -\lambda & 2 & \dots & 0 & 0\\
0 & n-1 & -\lambda & \ddots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \ddots & -\lambda & n\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
n-\lambda & n-\lambda & n-\lambda & \dots & n-\lambda & n-\lambda\\
n & -\lambda & 2 & \dots & 0 & 0\\
0 & n-1 & -\lambda & \ddots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \ddots & -\lambda & n\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
n-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
n & -n-\lambda & 2-n & \dots & -n & -n\\
0 & n-1 & -\lambda & \ddots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \ddots & -\lambda & n\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
=(n-\lambda)\begin{vmatrix}
-\lambda-1 & -\lambda & -\lambda & \dots & -\lambda & -\lambda\\
n-1 & n-\lambda-2 & n-\lambda & \dots & n-\lambda & n-\lambda\\
0 & n-2 & n-\lambda-3 & \ddots & n-\lambda & n-\lambda\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \ddots & 1-\lambda & n-\lambda\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
=(n-\lambda)\begin{vmatrix}
-\lambda-1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
n-1 & -\lambda-1 & 2 & \dots & 0 & 0\\
0 & n-2 & -\lambda-1 & \ddots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \ddots & -\lambda-1 & n-1\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda-1
\end{vmatrix}
$$

$$
=(n-\lambda)\cdot\det\Big(K_{n-1}-(\lambda+1)I\Big).
$$

Zřejmě $\det(K_1 - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ a $\det\Big(K_1 - (\lambda+1)I\Big) = \lambda(\lambda+2)$. Proto charakteristické polynomy Kacových matic jsou

$$
\begin{aligned}
\det(K_2 - \lambda I) &= (2-\lambda)\lambda(\lambda+2),\\
\det(K_3 - \lambda I) &= (3-\lambda)\Big(2-(\lambda+1)\Big)(\lambda+1)\Big((\lambda+1)+2\Big)\\
&= (3-\lambda)(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3),\\
\det(K_4 - \lambda I) &= (4-\lambda)\Big(3-(\lambda+1)\Big)\Big(1-(\lambda+1)\Big)\Big((\lambda+1)+1\Big)\Big((\lambda+1)+3\Big)\\
&= (4-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+4)
\end{aligned}
$$

atd. Poslední námi uvedená věta 9 tedy evidentně platí.

Rozlučme se citací několika slov Olgy Taussky-Todd:

I am proud to have been a torchbearer for matrix theory, and I am happy to see that there are many others to whom the torch can be passed. [20, str. 809]

Literatura

[1] Albers, D.: *John Todd: Numerical mathematics pioneer.* College Math. J. *38* (2007), 2–23.

[2] Gerschgorin, S.: *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix.* Izv. Akad. Nauk SSSR *7* (1931), 749–754.

[3] Linear Algebra and its Applications *13* (1976), Issue 1/2, speciální dvojsvazek věnovaný Olze Taussky-Todd.

[4] Linear Algebra and its Applications *280* (1998), speciální svazek věnovaný Olze Taussky--Todd.

[5] Linear and Multilinear Algebra *3* (1975), Issue 1/2, speciální dvojsvazek věnovaný Olze Taussky-Todd.

[6] Luchins, E. H., McLoughlin, M. A.: *In memoriam: Olga Taussky-Todd.* Notices Amer. Math. Soc. *43* (1996), 838–847.

[7] Pokorná, O.: *Sídla matematických pracovišť Matematicko-fyzikální fakulty.* Jubilejní almanach, I. Netuka, M. Stiborová (eds), Matfyzpress, Praha, 2002, 128–129.

[8] Shapiro, H.: *Notes from Math 223: Olga Taussky Todd's matrix theory course, 1976–1977.* Math. Intelligencer *19* (1997), 21–27.

[9] Schneider, H.: *Olga Taussky-Todd's influence on matrix theory and matrix theorists.* Linear Multilinear Algebra *5* (1977), 197–224.

[10] Schneider, H.: *Some personal reminiscences of Olga Taussky-Todd.* Linear Algebra Appl. *208* (1998), 15–19.

[11] Štěpánová, M.: *Olga Taussky-Todd a otázky Geršgorinových kruhů.* 33. mezinárodní konference Historie matematiky, J. Bečvář, M. Bečvářová (eds), Matfyzpress, Praha, 2012, 259–268.

[12] Štěpánová, M.: *Lokalizace vlastních čísel.* Cesty k matematice, A. Slavík (ed.), Matfyzpress, Praha, 2014, 124–146.

[13] Taussky-Todd, O.: *Bounds for characteristic roots of matrices.* Duke Math. J. *15* (1948), 1043–1044.

[14] Taussky-Todd, O.: *A recurring theorem on determinants.* Amer. Math. Monthly *56* (1949), 672–676.

[15] Taussky-Todd, O.: *Commutativity in finite matrices*, Amer. Math. Monthly *64* (1957), 229–235.

[16] Taussky-Todd, O.: *A generalization of a theorem by Lyapunov.* J. Soc. Ind. Appl. Math. *9* (1961), 640–643.

[17] Taussky-Todd, O.: *A remark on a theorem by Lyapunov.* J. Math. Anal. Appl. *2* (1961), 105–107.

[18] Taussky-Todd, O.: *Commutators of unitary matrices which commute with one factor.* J. Math. Mech. *10* (1961), 175–178.

[19] Taussky-Todd, O.: *Matrices with trace zero.* Amer. Math. Monthly *69* (1962), 40–42.

[20] Taussky-Todd, O.: *How I became a torchbearer for matrix theory.* Amer. Math. Monthly *95* (1988), 801–812.

[21] Taussky-Todd, O.: *An autobiographical essay.* 2nd ed., Mathematical People, Profiles and Interviews, D. J. Albers, G. L. Alexanderson (eds), A K Peters, Wellesley, MA, 2008, 320–350.

[22] Taussky-Todd, O., Motzkin, T. S.: *Pairs of matrices with property L.* Trans. Amer. Math. Soc. *73* (1952), 108–114.

[23] Taussky-Todd, O., Motzkin, T. S.: *Pairs of matrices with property L.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA *39* (1953), 961–963.

[24] Taussky-Todd, O., Motzkin, T. S.: *Pairs of matrices with property L (II).* Trans. Amer. Math. Soc. *80* (1955), 387–401.

[25] Taussky-Todd, O., Todd, J.: *Another look at a matrix of Mark Kac.* Linear Algebra Appl. *150* (1991), 341–360.

[26] Todd, J.: *John Todd (1911–2007).* Interviewed by Cohen, S. K., Oral History Project of the Caltech Archives, Pasadena, 1996, nahraný rozhovor (přepis rozhovoru dostupný na `http://resolver.caltech.edu/CaltechOH:OH_Todd_J`)