Vladimír Novotný
Velikonoce a Carl Friedrich Gauss

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 61 (2016), No. 1, 39–51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144900

Velikonoce a Carl Friedrich Gauss

Vladimír Novotný, Praha

Abstrakt. Toto pojednání je volným pokračováním článku *Velikonoce v našem kalendáři*, PMFA *60* (2015), 39–49. Odvozujeme v něm vztahy Gaussova algoritmu pro výpočet Velikonoc v juliánském a gregoriánském kalendáři, které umožňují přímé stanovení data Velikonoční neděle bez použití tradičních chronologických veličin, tj. zlatého čísla, nedělního písmene a epakty.

Velikonoce jsou nejvýznamnější křesťanské svátky a představují jediný lunisolární prvek v našem solárním kalednáři zavedeném Juliem Caesarem (100–44 př. n. l.) podle návrhu egyptského astronoma Sosigena a později reformovaném v roce 1582. Jsou to proto svátky pohyblivé a výpočet jejich data byl pro křesťany vždy velmi důležitý, protože se podle nich řídí celý církevní rok. Na středověkých univerzitách existoval dokonce předmět Computus paschalis a výpočet data Velikonoc byl jediným složitým výpočtem, který se v té době prováděl. Roku 1800 publikoval tehdy mladý německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855) algoritmus pro výpočet data Velikonoční neděle, který vycházel pouze z letopočtu daného roku a nevyužíval do té doby běžných pomocných veličin.

1. Určování data Velikonoční neděle v historii

V prvních staletích našeho letopočtu slavili křesťané Velikonoce spolu s židy a jejich svátkem Pesach. Nicejský koncil roku 325 stanovil pravidlo, že oslava křesťanských Velikonoc má být na židovském kalendáři nezávislá. Velikonoční nedělí byla ustanovena první neděle následující po prvním jarním úplňku. Postupně se k určení Velikonoc prosadila metoda používaná v Alexandrii a založená na devatenáctiletém Metonově cyklu. K určení data Velikonoční neděle sloužilo zlaté číslo, tj. pořadové číslo roku v Metonově cyklu, a nedělní písmeno daného roku.

Zajímavostí je, že na Britských ostrovech, kde proběhla christianizace velmi brzy, se až do 8. století používalo k určení Velikonoční neděle cyklu trvajícího 84 let podle staršího římského způsobu. O sjednocení postupu se způsobem určení Velikonoc na základě Metonova cyklu se zasloužil benediktinský mnich Beda Venerabilis (Beda Ctihodný, kolem 672–725) [34].

Metonův cyklus patří mezi základní kalendářní cykly. Po jeho uplynutí připadnou měsíční fáze na tytéž dny v roce. Sloučením čtyř Metonových cyklů vzniká tzv. Kallipův cyklus [26] o délce 76 let. Ten obsahuje v juliánském kalendáři vždy 19 přestupných

Ing. Vladimír Novotný, Jašíkova 1533/4, 149 00 Praha 4, e-mail: nasa@seznam.cz

dnů, kdežto na jednotlivé Metonovy cykly mohou připadat buď 4, nebo 5 přestupných dnů podle fáze souběhu Metonova cyklu se čtyřletým cyklem vkládání přestupného dne. Přesnějším cyklem je pak Hipparchův cyklus [26], který vznikne sloučením čtyř Kallipových cyklů a odebráním jednoho dne. Oproti Metonovu či Kallipovu cyklu představuje korekci 1 dne za 304 let. Pokud by byl použit pro výpočet fází Měsíce, nebylo by nutné provádět opravu jejich výpočtu, kterou přinesla roku 1582 gregoriánská reforma kalendáře. Metonův cyklus počíná rokem 1 před naším letopočtem,[1] rok 1 má tedy v Metonově cyklu pořadové číslo 2.

Druhým základním kalendářním cyklem je sluneční kruh o délce 28 let, po jehož uplynutí se opakuje průběh dnů v týdnu pro určité datum (i když se přiřazení dnů v týdnu k danému datu opakuje i uvnitř tohoto cyklu, celý cyklus opakování má 28 let). Tento cyklus počíná rokem 9 před naším letopočtem, rok 1 má tedy v tomto cyklu pořadové číslo 10.

Třetím ze základních kalendářních cyklů je patnáctiletý cyklus zvaný indikce. Tento cyklus nemá astronomický základ a někdy se dává do souvislosti s délkou služby římských legionářů nebo s periodou výběru daní. Cyklus indikce začíná roku 3 před naším letopočtem a rok 1 v něm má pořadové číslo 4.

Všechny tři uvedené cykly začínaly společně roku 4713 před naším letopočtem. Tento rok ve velmi vzdálené minulosti předcházející jakékoli známé historické události zvolil Joseph Justus Scaliger (1540–1609) roku 1583 za počátek průběžného, tzv. juliánského počítání let. Roku 1849 zavedl John Herschel (1792–1871) tzv. juliánské datum, průběžné počítání dnů od počátku uvedeného roku. Celá juliánská perioda má trvání $19 \times 28 \times 15 = 7980$ let.

Juliánský kalendář však není z dlouhodobého hlediska dostatečně přesný a jak počátek jara, tak i data měsíčních úplňků přestaly po několika staletích souhlasit s předpokládanými daty. Koncem 16. století dosáhla odchylka jarní rovnodennosti od standardního data 21. března 10 dnů a odchylka pozorovaného data měsíčního úplňku od data určeného cyklickým výpočtem podle Metonova cyklu 4 dnů. Proto roku 1582 došlo k reformě kalendáře a místo juliánského kalendáře byl zaveden reformovaný, tzv. gregoriánský kalendář. Kalendář byl upraven vypuštěním deseti dnů, aby začátek jara připadl zpět na 21. března. O tři dny byla také opravena fáze Měsíce. Dále byla zavedena opatření, aby se začátek jara ani data pozorovaných měsíčních úplňků již dlouhodobě neposouvaly od kalendářních hodnot. Z kalendáře byly vypuštěny tři přestupné dny během každého čtyřsetletého cyklu (sluneční korekce) a také fáze Měsíce byla korigována zvýšením o 1 den každých 300 let, a to osmkrát v cyklu trvajícím 2 500 let (měsíční korekce).

K určení Velikonoční neděle již nestačilo zlaté číslo a nedělní písmeno daného roku (které má ovšem v gregoriánském kalendáři jinou hodnotu než v kalendáři juliánském). Místo zlatého čísla se začala pro výpočet data měsíčního úplňku užívat veličina zvaná epakta. Ta v gregoriánském kalendáři znamená stáří Měsíce na začátku roku.

K určení data Velikonoční neděle se užívaly a dosud užívají tabulky obsahující uvedené veličiny [32]. Hlavním cílem výuky nebylo v průběhu let ani tak pochopení astronomických cyklů, ale spíše zvládnutí správného použití dotyčných tabulek.

[1] Rok nula se zde nezavádí. Astronomové jej ale v některých svých výpočtech používají.

2. Carl Friedrich Gauss

Roku 1800 publikoval způsob určení data Velikonoční neděle Carl Friedrich Gauss, jeden z největších matematiků historie. Problém vyřešil již jako osmnáctiletý. Uvádí se [9], že jeho motivací byl zájem o vlastní narozeniny. Gaussova matka neznala jeho datum narození, ale věděla, že se narodil roku 1777 osm dní před svátkem Nanebevstoupení Páně. Ten připadá vždy na čtvrtek, 40. den po velikonoční sobotě. Velikonoční neděle nastala roku 1777 dne 30. března, svátek Nanebevstoupení Páně 8. května a datum Gaussova narození tak bylo 30. dubna. O Gaussově životě a díle viz [9] a [31].

Gauss zkonstruoval algoritmus, jehož jediným vstupním údajem byl pouze letopočet roku, ve kterém hledáme datum Velikonoční neděle. Obešel se tedy zcela bez pomocných veličin, tj. zlatého čísla, epakty a nedělního písmene. Vhodnou volbou parametrů výpočtu lze počítat datum Velikonoční neděle v juliánském nebo gregoriánském kalendáři. Původní publikací Gaussova algoritmu (často se užívá i termínu Gaussovy vzorce) je [11]. Gauss se k tématu vrátil i v článcích [14] a [15], v práci [16] pak publikoval opravu výpočtu pro roky následující po roce 4200 v gregoriánském kalendáři, na jejíž potřebu ho upozornil jeho žák Paul Tittel (1784–1831). V článku [13] se věnuje výpočtu židovských Velikonoc, tj. svátku Pesach. Tato problematika však již přesahuje téma našeho pojednání.

Gaussovy výsledky vyvolaly značný zájem, např. [33], [6] či [5]. Gaussovu algoritmu se věnovaly též pozdější práce [25], [19], [4] a [20]. Ačkoli jsou Gaussovy vzorce velmi často publikovány v literatuře, jejich dobře dostupné jednoduché odvození zatím chybí.

Roku 1817 publikoval slavný francouzský astronom Jean-Batiste Joseph Delambre jiný algoritmus, zahrnující i případy, které Gauss ponechal ve svém výpočtu jako výjimky [8]. V dnešní době se sice témata týkající se výpočtu data Velikonoc objevují většinou v publikacích věnujících se rekreační matematice, zlepšení dosavadních algoritmů se ale věnují i vážné vědecké publikace. Z nich zmiňme alespoň práce Jeana-Marie Oudina [28] a Heinera Lichtenberga [24].

Uvedené způsoby výpočtu Velikonoc platí pro datum Velikonoc slavené jak katolickou církví, tak i protestantskými církvemi, které postupně přijaly gregoriánský kalendář. Neplatí však pro většinu ortodoxních církví, které zpravidla užívají juliánský kalendář a pro stanovení Velikonoc používají často skutečné astronomické okamžiky jarní rovnodennosti a měsíčních úplňků. U takového přístupu však vzniká problém s určením dne (většinou jsou na zemském povrchu dvě data současně, tj. i dva dny v týdnu podle zeměpisné délky, a pokud by šlo o sobotu a neděli, mohlo by se stát, že by se na některých místech na Zemi slavily Velikonoce příští den a na jiných až za několik týdnů). Proto se bere za rozhodující poledník Jeruzaléma a jemu odpovídající datum Velikonoční neděle pak platí pro celou příslušnou církev.

3. Juliánský kalendář

V juliánském kalendáři se předpokládá, že Metonův cyklus platí přesně, tedy že se po uplynutí 19 let opakují pro stejná data stejné fáze Měsíce v libovolně dlouhém období. Datum velikonočního úplňku zde závisí pouze na pořadí příslušného roku v Metonově cyklu, tj. na zlatém čísle. Velikonočním úplňkem se rozumí první jarní úplněk, tj. první úplněk nastávající 21. března nebo později. Velikonoční nedělí je pak první neděle následující po velikonočním úplňku. Připadne-li tedy velikonoční úplněk na neděli, bude Velikonoční nedělí teprve neděle následující. Rozdíl dat Velikonoční neděle a velikonočního úplňku pak závisí pouze na nedělním písmenu daného roku (je-li tento rok přestupný, pak na druhém nedělním písmenu, neboť velikonoční úplněk i Velikonoční neděle nastává v každém přestupném roce až po přestupném dnu, kterým je 24. únor).

V tomto článku odvodíme vzorce Gaussova algoritmu, kde se pomocné veličiny jako zlaté číslo nebo nedělní písmeno nepoužívají a vstupní proměnnou pro výpočet je pouze letopočet příslušného roku vyjádřený kladným číslem R.

Je zřejmé, že do výpočtu budou vstupovat délka Metonova cyklu (19 let), délka cyklu, ve kterém se vkládá přestupný den (4 roky), a konečně délka cyklu, ve kterém by se opakovalo přiřazení příslušného dne v týdnu k danému datu, kdyby nebyly vkládány přestupné dny (7 let). Poslední dva cykly se ovšem v kalendáři kombinují. Označme tedy podle Gausse postupně zbytky po dělení čtyřmístného letopočtu R čísly 19, 4 a 7 jako a, b, c. Tedy

$$a = R \bmod 19, \tag{1}$$

$$b = R \bmod 4, \tag{2}$$

$$c = R \bmod 7. \tag{3}$$

Připomeňme, že výraz $m \bmod n$ pro přirozená čísla m a n znamená zbytek po dělení čísla m číslem n, tedy jedno číslo z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Dále budeme používat též celočíselné dělení $m \operatorname{div} n$ znamenající celou část podílu m/n, tj. největší celé číslo menší nebo rovné m/n.

3.1. Výpočet data velikonočního úplňku

Předpokládejme, že velikonoční úplněk nastane v prvním roce Metonova cyklu o M dní později oproti 21. březnu, tj. jeho datum bude $d = 21.$ března $+M$. Protože rozdíl délky slunečního roku a dvanácti lunárních měsíců je, zaokrouhleno na celé dny, $365 - (6 \times 30 + 6 \times 29) = 365 - 354 = 11$ dní, nastane v roce příštím velikonoční úplněk o 11 dní dříve. Za standardní délku lunace se bere 30 dní, což znamená, že další úplněk nastane o $30 - 11 = 19$ dní později. Je vhodné uzpůsobit výpočet tak, abychom ve výsledném vzorci pro určení data velikonočního úplňku používali spíše sčítání než odčítání.

V dalších letech nastanou velikonoční úplňky vždy o dalších 19 dní později. Pokud přitom d vzroste nad hodnotu 30, musíme 30 odečíst, abychom promítli úplněk do základního intervalu velikonoční lunace. Toto se v kalendáři projeví potřebou vložit v příslušném roce přestupný měsíc. Během jednoho Metonova cyklu se vkládá 7 přestupných měsíců, z nichž 6 má délku 30 dní, sedmý pak 29 dní. Tím se dosáhne shody se slunečním kalendářem, který má během 19 let $19 \times 365 = 6935$ dní. Lunární kalendář má v této úpravě během 19 let celkem také 6935 dní ($19 \times 354 + 6 \times 30 + 29 = 6726 + 180 + 29 = 6935$). Přitom zde nepočítáme přestupné dny, jejichž počet je ovšem v konkrétním Metonově cyklu pro sluneční i lunární kalendář stejný, buď 4, nebo 5. Výpočet lze vyjádřit vztahem

$$d = (19a + M) \bmod 30, \tag{4}$$

kde funkce mod převádí výsledek do základního intervalu 0 až 29. Pokud uvážíme, že v prvním roce Metonova cyklu nastává v juliánském kalendáři velikonoční úplněk 5. dubna, zjistíme, že konstanta M nabývá v juliánském kalendáři hodnoty 15 a platí

$$d = (19a + 15) \operatorname{mod} 30.$$

Velikonoční úplněk tedy v juliánském kalendáři může připadnout pouze na jedno z 19 konkrétních dat v intervalu od 21. března do 19. dubna.

3.2. Výpočet data Velikonoční neděle

Dalším úkolem je zjistit, o kolik dní nastává v každém roce Velikonoční neděle později než velikonoční úplněk. Zde ale musíme být opatrní, protože v případě, že velikonoční úplněk připadne na neděli, je Velikonoční nedělí až neděle následující. Musíme to mít na zřeteli při použití funkce mod, jejímž výstupem jsou čísla od 0 do $n - 1$, kde n je dělitel.

Zabývejme se nejprve otázkou, jaký den v týdnu připadá postupem let na konkrétní pevné datum. Protože nepřestupný rok má 365 dnů, což představuje 52 týdnů a 1 den, připadá v dalším roce na totéž datum následující den v týdnu. Po přestupném roce se pak posun zvýší o další den, protože přestupný rok má 366 dnů, tedy 52 týdnů a 2 dny. Důležité je, že při přechodu k dalšímu století zůstává princip stejný, protože všechny sekulární roky (tj. roky končící dvěma nulami) jsou v juliánském kalendáři přestupné.

Pokud přiřadíme dnům v týdnu čísla od 1 (pondělí) do 7 (neděle) odpovídající denním písmenům v kalendáři (A až G), můžeme den v týdnu t připadající na pevně dané datum v kalendáři vyjádřit vzorcem

$$t = (R + R \operatorname{div} 4 + K) \operatorname{mod} 7 + 1,$$

kde $R \operatorname{div} 4$ je podíl $R/4$, od nějž je odečtena desetinná část. Konstantu K můžeme určit dosazením hodnoty t konkrétního data, které chceme vzorcem vyjádřit. Není však určena jednoznačně, přičtení jakéhokoli násobku 7 do závorky hodnotu výrazu nezmění.

Hledáme-li obdobně počet dní s od určitého data do následující neděle, bude mít příslušný vzorec tvar

$$s = (-R - R \operatorname{div} 4 + N) \operatorname{mod} 7 + 1,$$

kde bychom ovšem měli za konstantu N zvolit dostatečně velké číslo, aby výraz v závorce byl i pro největší uvažovaný letopočet kladný. Přičtení 1 je nutné proto, že hledáme neděli následující po uvažovaném datu. Výsledek tedy bude v rozmezí 1 až 7.

Naší úlohou je tedy nalézt počet dní do následující neděle pro velikonoční úplněk, tj. den 21. března $+d$. Zaveďme označení e pro zbytek

$$e = (-R - R \operatorname{div} 4 - d + N) \operatorname{mod} 7.$$

Pokusme se upravit výraz pro e tak, aby obsahoval pouze sčítání. Do závorky můžeme vložit sedminásobek libovolné veličiny bez vlivu na výsledek. Upravme ji tedy přičtením výrazu $(7R + 7R \operatorname{div} 4 + 7d)$. Pak

$$e = (-R+7R-R \operatorname{div} 4+7R \operatorname{div} 4-d+7d+N) \operatorname{mod} 7 = (6R+6R \operatorname{div} 4+6d+N) \operatorname{mod} 7.$$

Nyní se budeme snažit nahradit veličiny R a $(R \operatorname{div} 4)$, které rostou s časem, zbytky po dělení R čtyřmi a sedmi, tj. výrazy $(R \bmod 4)$ a $(R \bmod 7)$, které jsou omezené (tj. Gaussovy zbytky b a c). Přičteme do závorky členy $(-14R \operatorname{div} 4) = -14(R \operatorname{div} 4)$ a $(-28R \operatorname{div} 7) = -28(R \operatorname{div} 7)$, které nezmění výsledek,

$$\begin{aligned} e &= (6R + 6R \operatorname{div} 4 - 14R \operatorname{div} 4 - 28R \operatorname{div} 7 + 6d + N) \bmod 7 = \\ &= (2R - 8R \operatorname{div} 4 + 4R - 28R \operatorname{div} 7 + 6d + N) \bmod 7 = \\ &= [2(R - 4R \operatorname{div} 4) + 4(R - 7R \operatorname{div} 7) + 6d + N] \bmod 7. \end{aligned}$$

Dále využijeme identit platných pro každé kladné R

$$R = 4(R \operatorname{div} 4) + R \bmod 4, \quad R = 7(R \operatorname{div} 7) + R \bmod 7$$

a nahradíme výrazy v kulatých závorkách výrazy $(R \bmod 4)$ a $(R \bmod 7)$

$$e = (2R \bmod 4 + 4R \bmod 7 + 6d + N) \bmod 7.$$

Dostáváme tak Gaussův vzorec pro zbytek e

$$e = (2b + 4c + 6d + N) \bmod 7, \tag{5}$$

kde N je konstanta platná pro juliánský kalendář. Určíme ji např. z podmínky, že v roce 1582 připadla velikonoční neděle na 15. dubna:

Pro rok 1582 platí $a = 5$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 20$ a $d + e - 9 = 15$, tedy $e = 4$. Protože podle (5) současně

$$e = (4 + 0 + 120 + N) \bmod 7 = (124 + N) \bmod 7,$$

musí být $N = 6$, zvolíme-li nejmenší vyhovující hodnotu.

Velikonoční neděle v juliánském kalendáři tedy připadne na

$$(21 + d + e + 1) = (22 + d + e)\text{–tý březen pro } d + e < 10 \tag{6}$$

či na

$$(d + e - 9)\text{–tý duben pro } d + e > 9. \tag{7}$$

4. Gregoriánský kalendář

V gregoriánském kalendáři se předpokládá přesná platnost Metonova cyklu vždy jen pro jedno století. Pro zpřesnění se v něm zavádějí sluneční a měsíční korekce. Sluneční korekce představuje vypuštění přestupného dne v sekulárních letech (tj. letech, v nichž končí století), která nejsou dělitelná 400. Měsíční korekce znamená opravu (zvýšení) stáří Měsíce o 1 den v sekulárních letech počínaje rokem 1800 osmkrát s periodou 300 let, tj. v letech 1800, 2100, 2400, 2700, 3000, 3300, 3600, 3900. Poté se počínaje rokem 4300 celý 2500 let trvající cyklus opakuje.

Na rozdíl od juliánského kalendáře nezávisí datum velikonočního úplňku pouze na pořadí roku v Metonově cyklu, tj. zlatém čísle, ale na veličině zvané gregoriánská epakta. Tuto veličinu budeme dále značit E_{g} a znamená stáří Měsíce na začátku roku.

Při reformě kalendáře byla zavedena i tzv. juliánská epakta E_j, která respektuje jednorázovou třídenní korekci stáří Měsíce při přechodu na nový, gregoriánský kalendář, ale jinak odpovídá pravidlům platným v juliánském kalendáři. Její hodnota E_j se vypočte ze vztahu

$$E_\mathrm{j} = (11 \times \text{zlaté číslo}) \bmod 30$$

a slouží ke snazšímu výpočtu gregoriánské epakty.

Přiřazení gregoriánské epakty ke zlatému číslu se pro různá staletí mění. Pro dané datum velikonočního úplňku je pak Velikonoční neděle v kalendáři určena nejbližším nedělním písmenem (v případě přestupného roku jde o druhé nedělní písmeno, tj. to, které platí po přestupném dni) daného roku [27].

Vztahy z kapitoly 3.2 lze upravit i pro gregoriánský kalendář. Díky tomu, že se korekce aplikují vždy v sekulárních letech a platí vždy pro celé následující století, je jejich aplikace v Gaussově metodě výpočtu Velikonoc poměrně snadná. Jedinými parametry výpočtu, které se v gregoriánském kalendáři mezi jednotlivými staletími mění, jsou hodnoty M a N používané při výpočtu zbytků d a e.

Při přechodu na gregoriánský kalendář však dochází k situacím, které v juliánském kalendáři nenastávají. Pravidla pro výpočet bylo nutno upravit, aby k nim nemohlo dojít ani v gregoriánském kalendáři.

Velikonoční úplněk může postupně v různých staletích připadnout na všechna data mezi 21. březnem a 19. dubnem. Je-li 19. dubna neděle, pak pokud by na 19. dubna připadl velikonoční úplněk, měla by Velikonoční neděle nastat až 26. dubna. To v juliánském kalendáři není možné a autoři reformy byli vázáni požadavkem, aby ani v novém kalendáři k této situací nedocházelo. V takovém případě se tedy velikonoční úplněk překládá na 18. dubna, a tudíž Velikonoční neděle nastane již 19. dubna.

Obdobně může v některých staletích připadnout velikonoční úplněk dvakrát během Metonova cyklu na 18. dubna. Ani toto v juliánském kalendáři nenastává. V tomto případě se druhý z nich v gregoriánském kalendáři překládá na 17. duben.

Popsané dvě situace nejsou Gaussovým algoritmem vystiženy a řeší se jako výjimky.

K první výjimce dojde, pokud v příslušném roce platí $d = 28$. Pak je nutno hodnotu d uměle snížit na $d = 27$. Tímto opatřením se i veličina e sníží o 6 a součet $d + e$ bude o 7 menší, tj. Velikonoční neděle připadne nikoliv na 25. dubna, ale již na 18. dubna.

Druhá výjimka nastává, pokud velikonoční úplněk připadne na 18. dubna ($d = 27$) a současně platí $a > 10$. Pak musíme hodnotu d uměle snížit na $d = 26$ a Velikonoční neděle připadne nikoliv na 25. dubna, ale již na 17. dubna.

4.1. Hodnoty veličin M a N v gregoriánském kalendáři

V juliánském kalendáři jsou hodnoty veličin M a N v čase konstantní. Pro libovolný rok v něm tedy platí $M = 15$, $N = 6$. Na rozdíl od toho se gregoriánském kalendáři hodnoty veličin M a N století od století mění. V průběhu jednoho století však zůstávají konstantní.

Veličina M závisí na stáří Měsíce v kalendáři a ovlivňuje datum, kdy stáří Měsíce dosáhne určité hodnoty. To je závislé na vypouštění přestupných dnů v gregoriánském kalendáři oproti juliánskému. Stáří Měsíce je nezávislé na změně v datování, proto při vypuštění dne v kalendáři (sluneční korekci) je třeba stáří Měsíce snížit o 1 den, tomu odpovídá zvýšení hodnoty M o 1. Veličina M dále závisí na měsíční korekci, při jejíž aplikaci je třeba stáří Měsíce zvýšit o 1 den, tomu odpovídá snížení hodnoty M o 1. Přesáhne-li M hodnotu 29, je třeba ji snížit o 30. Během reformy kalendáře a po ní došlo do dnešní doby k těmto změnám:

	ΔM	M
juliánský kalendář	-	15
vypuštění 10 dnů z kalendáře v roce 1582	+10	25
oprava stáří Měsíce v roce 1582 o 3 dny	−3	22
vypuštění přestupného dne v roce 1700	+1	23
vypuštění přestupného dne v roce 1900	+1	24

Poznamenejme, že vypuštění přestupného dne v roce 1800 se kompenzuje měsíční korekcí aplikovanou ve stejném roce.

Změny veličiny N jsou ovlivněny pouze vypouštěním přestupných dnů v kalendáři, které ovlivňují den v týdnu připadající na určité datum a nezávisejí na aplikaci měsíční korekce. Při každém vypuštění přestupného dne je třeba hodnotu N o jednotku zvýšit. Přesáhne-li N hodnotu 6, snížíme ji o 7. Průběh veličiny N během reformy a po ní až do současnosti je tento:

	ΔN	N
juliánský kalendář	-	6
vypuštění 10 dnů z kalendáře v roce 1582	+10	2
vypuštění přestupného dne v roce 1700	+1	3
vypuštění přestupného dne v roce 1800	+1	4
vypuštění přestupného dne v roce 1900	+1	5

Změny veličin M a N můžeme shrnout takto:

N roste o jednotku vždy při vynechání přestupného dne v gregoriánském kalendáři. Protože toto nastává vždy třikrát ve 400 letém cyklu, N třikrát v tomto cyklu roste a počtvrté zůstává konstantní. Kopíruje tedy zbytek po dělení rozdílu dat stejného dne v gregoriánském K_{g} a juliánském kalendáři K_{j} sedmi. Hodnota N je dána vztahem $N = [(K_{\mathrm{g}} - K_{\mathrm{j}}) - 8] \bmod 7$.

M kopíruje růst N kromě aplikace měsíční korekce v letech 1800, 2100, 2400, 2700, 3000 atd. V takových případech zůstane konstantní (pokud se N zvětšuje o 1), nebo dokonce klesne o 1 (pokud zůstává N konstantní). Také lze říci, že hodnota M kopíruje zbytek po rozdílu juliánské E_{j} a gregoriánské E_{g} epakty dělený 30. Pro hodnotu M platí $M = [(E_{\mathrm{j}} - E_{\mathrm{g}}) + 12] \bmod 30$.

Zavedeme-li veličiny Σ_{S} a Σ_{M} jako součet slunečních a měsíčních korekcí od zavedení gregoriánského kalendáře do daného data, můžeme vyjádřit rozdíl kalendářů $K_{\mathrm{g}} - K_{\mathrm{j}}$ jako

$$K_{\mathrm{g}} - K_{\mathrm{j}} = 10 + \Sigma_{\mathrm{S}}$$

a rozdíl epakt $E_{\mathrm{j}} - E_{\mathrm{g}}$ jako

$$E_{\mathrm{j}} - E_{\mathrm{g}} = 10 + \Sigma_{\mathrm{S}} - \Sigma_{\mathrm{M}}.$$

Pak platí
$$M = [(\Sigma_\mathrm{S} - \Sigma_\mathrm{M}) + 22] \bmod 30$$
a
$$N = (\Sigma_\mathrm{S} + 2) \bmod 7\,.$$

4.2. Gaussovy vztahy pro výpočet veličin M a N

Pro výpočet veličin M a N je třeba vyjádřit rozdíly kalendářů $K_\mathrm{g} - K_\mathrm{j}$ a epakt $E_\mathrm{j} - E_\mathrm{g}$ jako funkce času. U rozdílu kalendářů $K_\mathrm{g} - K_\mathrm{j}$ je řešení snazší. Od počáteční hodnoty 10 platné od roku 1582 se zvětšuje o jednotku v každém sekulárním roce s výjimkou let dělitelných 400 díky sluneční korekci. Zavedeme-li (opět podle Gausse) veličiny

$$k = R \operatorname{div} 100, \tag{8}$$
$$p = k \operatorname{div} 3, \tag{9}$$
$$q = k \operatorname{div} 4, \tag{10}$$

můžeme rozdíl $K_\mathrm{g} - K_\mathrm{j}$ vyjádřit jako

$$K_\mathrm{g} - K_\mathrm{j} = (k - 16) + 10 - (k - 16) \operatorname{div} 4 = k - k \operatorname{div} 4 - 2.$$

Pak $N = [(K_\mathrm{g} - K_\mathrm{j}) - 8] \bmod 7 = [k - k \operatorname{div} 4 - 10] \bmod 7 = [k - k \operatorname{div} 4 + 4] \bmod 7$, a tedy konečně
$$N = [k - q + 4] \bmod 7. \tag{11}$$
Dostáváme tedy Gaussův výraz pro N. Tato hodnota platí pro libovolný letopočet.

Rozdíl epakt $E_\mathrm{j} - E_\mathrm{g}$ se zvětšuje v každém sekulárním roce, pokud není dělitelný 400, o jednotku vlivem sluneční korekce. Navíc počínaje rokem 1800 se v intervalu 300 let až do roku 3900 aplikuje měsíční korekce, která ho snižuje o jednotku. Pokud se v určitém roce aplikují korekce obě (2100, 2700, 3000, 3300, 3900), pak se vzájemně ruší a rozdíl epakt zůstává nezměněn. V sekulárních letech, kdy se sluneční korekce neaplikuje, ale měsíční ano (2400, 3600), se hodnota rozdílu $E_\mathrm{j} - E_\mathrm{g}$ o jednotku sníží. Po roce 3900 se aplikuje měsíční korekce až roku 4300, přičemž se její 2 500 let dlouhý cyklus opakuje. Důvodem měsíčních korekcí je přesnější vystižení délky Metonova cyklu.

Pro roky před letopočtem 4200 platí

$$E_\mathrm{j} - E_\mathrm{g} = (k - 16) + 10 - (k - 16) \operatorname{div} 4 - (k - 15) \operatorname{div} 3 = k - k \operatorname{div} 4 - k \operatorname{div} 3 + 3.$$

Pak

$$M = [(E_\mathrm{j} - E_\mathrm{g}) + 12] \bmod 30 = (k - k \operatorname{div} 4 - k \operatorname{div} 3 + 15) \bmod 30.$$

Nyní můžeme konečně psát

$$M = (k - p - q + 15) \bmod 30, \tag{12}$$

což je původní Gaussův vztah pro M platný do roku 4199. Chceme-li vyjádřit výpočet veličiny M platný obecně pro jakýkoli letopočet, je třeba opravit výraz pro rozdíl epakt

rok	korekce S - sluneční	M - měsíční		sumy korekcí Σ_S	Σ_M	Gaussovy veličiny M	N	rozdíl kalend. $K_g - K_j$	rozdíl epakt $E_j - E_g$
			do 1582	0	0	15	6	-	-
			1583–1599	0	0	22	2	10	10
1600	-		1600–1699	0	0	22	2	10	10
1700	S		1700–1799	1	0	23	3	11	11
1800	S	M	1800–1899	2	1	23	4	12	11
1900	S		1900–1999	3	1	24	5	13	12
2000	-		2000–2099	3	1	24	5	13	12
2100	S	M	2100–2199	4	2	24	6	14	12
2200	S		2200–2299	5	2	25	0	15	13
2300	S		2300–2399	6	2	26	1	16	14
2400	-	M	2400–2499	6	3	25	1	16	13
2500	S		2500–2599	7	3	26	2	17	14
2600	S		2600–2699	8	3	27	3	18	15
2700	S	M	2700–2799	9	4	27	4	19	15
2800	-		2800–2899	9	4	27	4	19	15
2900	S		2900–2999	10	4	28	5	20	16
3000	S	M	3000–3099	11	5	28	6	21	16
3100	S		3100–3199	12	5	29	0	22	17
3200	-		3200–3299	12	5	29	0	22	17
3300	S	M	3300–3399	13	6	29	1	23	17
3400	S		3400–3499	14	6	0	2	24	18
3500	S		3500–3599	15	6	1	3	25	19
3600	-	M	3600–3699	15	7	0	3	25	18
3700	S		3700–3799	16	7	1	4	26	19
3800	S		3800–3899	17	7	2	5	27	20
3900	S	M	3900–3999	18	8	2	6	28	20
4000	-		4000–4099	18	8	2	6	28	20
4100	S		4100–4199	19	8	3	0	29	21
4200	S		4200–4299	20	8	4	1	30	22
4300	S	M	4300–4399	21	9	4	2	31	22
4400	-		4400–4499	21	9	4	2	31	22
4500	S		4500–4599	22	9	5	3	32	23
4600	S	M	4600–4699	23	10	5	4	33	23
4700	S		4700–4799	24	10	6	5	34	24
4800	-		4800–4899	24	10	6	5	34	24
4900	S	M	4900–4999	25	11	6	6	35	24
5000	S		5000–5099	26	11	7	0	36	25

Tab. 1. Průběh veličin M a N do roku 5099 v závislosti na veličinách Σ_S, Σ_M, $K_g - K_j$ a $E_j - E_g$

$E_\mathrm{j} - E_\mathrm{g}$, aby platil i pro $R > 4199$. Zde se však spokojíme s Gaussovým řešením, kdy místo vztahu (9) pro veličinu p volí

$$p = (8k + 13) \operatorname{div} 25. \tag{13}$$

Výraz (12) pro M zůstává v platnosti a dává správnou hodnotu pro libovolný letopočet. Z něj pak můžeme pro rozdíl epakt $E_\mathrm{j} - E_\mathrm{g}$ nalézt

$$E_j - E_g = k - k \operatorname{div} 4 - (8k + 13) \operatorname{div} 25 + 3.$$

5. Shrnutí vzorců

Při výpočtu Velikonoční neděle tedy můžeme postupovat takto:

Určíme zbytky po dělení letopočtu 19, 4 a 7 podle (1), (2) a (3). Dále podle (4) a (5) stanovíme hodnoty d a e, kde pro gregoriánský kalendář platí v rozmezí let 1900–2099 $M = 24$, $N = 5$. Pro jiná staletí nalezneme příslušné hodnoty M a N v tabulce 1, pro juliánský kalendář pak je $M = 15$, $N = 6$. Velikonoční neděle pak připadne na $(22 + d + e)$-tý březen pro $d + e < 10$ či na $(d + e - 9)$-tý duben pro $d + e > 9$, viz vztahy (6) a (7).

Pokud vyjde $d = 28$, nebo $d = 27$ za podmínky $a > 10$, snížíme d na 27, případně na 26.

Příklad:

Stanovme datum Velikonoční neděle pro rok 2016.

V gregoriánském kalendáři bude $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$. Pak bude

$$d = (19 \times 2 + 24) \bmod 30 = 2,$$
$$e = (2 \times 0 + 4 \times 0 + 6 \times 2 + 5) \bmod 7 = 3.$$

Velikonoční neděle tedy nastane $22 + 2 + 3 = 27$. března.

V juliánském kalendáři bude opět $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$. Dále

$$d = (19 \times 2 + 15) \bmod 30 = 23,$$
$$e = (2 \times 0 + 4 \times 0 + 6 \times 23 + 6) \bmod 7 = 4.$$

Velikonoční neděle tedy nastane $23 + 4 - 9 = 18$. dubna. To je ovšem její datum v juliánském kalendáři, v gregoriánském kalendáři mu odpovídá $18 + 13 = 31$. dubna, což je totožné s datem 1. května.

6. Závěr

Gauss v mladém věku nejen vyřešil problém výpočtu data Velikonoc, ale položil základy celé modulární aritmetiky [12]. V pracích Hermanna Kinkelina (1832–1913) [19] a Heinera Lichtenberga [23], [24] byl později Gaussův algoritmus upraven tak, aby nebylo nutné zavádět výjimky, ale aby výsledné datum Velikonoční neděle ve všech případech vyplývalo z upravených vzorců (viz též [36]).

Při skutečném použití Gaussova algoritmu či jiných matematických postupů však musíme mít na paměti, že oficiální metodou pro výpočet data Velikonoc je původní

Liliova–Claviova metoda, jejíž výsledky můžeme sledovat v Claviově obsáhlém díle. Gaussova metoda je s ní však ekvivalentní a pro praktické použití mnohem vhodnější, zvláště při dnešním rozsáhlém použití počítačů.

Poděkování., Autor děkuje prof. RNDr. Michalu Křížkovi, DrSc., za inspiraci, podporu a rady při psání tohoto článku a doc. RNDr. Aleně Šolcové, PhD., a doc. RNDr. Marku Wolfovi, CSc., za cenné připomínky, které pomohly zlepšit jeho obsah.

L i t e r a t u r a

[1] Bär, N. A.: *Die Osterformel von C. F. Gauß* [cit. 22. 11. 2015]. Dostupné z: `http://www.nabkal.de/gauss1.html` `http://www.nabkal.de/gauss2.html`

[2] Bergmann, W.: *Noch einmal zu den Ausnahmeregeln der Gauss'schen Osterformel*. Historia Math. *17* (1990), 256–258.

[3] Bien, R.: *Gauß and Beyond: The making of Easter algorithms*. Arch. Hist. Exact Sci. *58 (5)* (2004), 439–452.

[4] Butcher, S.: *General proof of Gauss' rule for finding Easter day*. Dublin, 1876.

[5] Calandrelli, G.: *Formole analitiche della Pasqua*. Giorn. Arcad. *XVI* (1822), 172–187.

[6] Ciccolini, L.: *Formole analitiche pel calcollo della Pasqua*. Roma, 1817.

[7] Clavius, C.: *Romani calendarii a Gregorio XIII. P.M. Restituti Explicatio*. Romae, 1603 [cit. 22. 11. 2015]. Dostupné z: `http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:P35YUZP5`

[8] Delambre, J. B. J.: *Formules pour calculer la Lettre Dominicale, le Nombre d'Or, l'Epacte et la fete de Paques, pour une année Grégorienne ou Julienne quelconque. Connaissance des temps, ou des mouvements célestes?* L'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an, 1817, 307–317.

[9] Dunnington, G. W.: *Carl Friedrich Gauss – Titan of science*. The Mathematical Association of America, 2004.

[10] Felber, H.-J.: *Die beiden Ausnahmebestimmungen in der von C.F. Gauss aufstellten Osterformel*. Die Sterne *53* (1977), 22–34.

[11] Gauss, C. F.: *Berechnung der Osterfestes*. Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgeben vom Freinherrn von Zach, August 1800, 121–130. In: Werke, Bd. 6, 73–79.

[12] Gauss, C. F.: *Disquisitiones Arithmeticae*. Lipsiae, 1801.

[13] Gauss, C. F.: *Berechnung des jüdischen Osterfestes*. Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgeben vom Freinherrn von Zach, Mai 1802, 435–437. In: Werke, Bd. 6, 80–81.

[14] Gauss, C. F.: *Noch etwas über die Bestimmung des Osterfestes Braunschweigisches Magazin*. September 12, 1807, 589–596. In: Werke, Bd. 6, 82–86.

[15] Gauss, C. F.: *Eine leichte Methode, den Ostersonntag zu finden*. Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1814, Berlin, 1811, 273. In: Werke, Bd. 11, Abt. 1, 199–200.

[16] Gauss, C. F.: *Berichtigung zu der Aufsatze: Berechnung des Osterfestes*. Mon. Corr., 1800, 121. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgeg. von v. Lindenau u. Bohnenberger *1* (1816) 158. In: Werke, Bd. 11, Abt. 1, 201.

[17] Goldscheider, F.: *Über die Gauss'sche Osterformel.* Wissenschafltliche Beilage zum Jahresbericht des Luisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin, I. Teil: Ostern, 1896, II. Teil: Ostern, 1899.

[18] Grassl, A.: *Die Gauß'sche Osterregel und ihre Grundlagen.* Sterne und Weltraum *32* (1993), 274–277.

[19] Kinkelin, H.: *Die Berechnung des christlichen Osterfestes.* Zeitschrift für Mathematik und Physik *15* (1870), 217–238.

[20] Knobloch, W.: *Die wichtigsten Kalender der Gegenwart.* Neunten Jahresbericht der deutschen Staatsrealschule in Karolinenthal, 1885, 1–90.

[21] Kracht, D.: *Herleitung der Gausschen Formel* [cit. 22. 11. 2015]. Dostupné z: `http://www.kr8.de/osternherleitung_der_formel.htm`

[22] Lanckau, E.: *Sonne oder Mond — der Kalender und Gauß* [cit. 22. 11. 2015]. Dostupné z: `http://web.archive.org/web/20060404084353/ http://www.mathematik.uni-halle.de/~cantorev/reports/verabschiedung-2000.pdf`

[23] Lichtenberg, H.: *Zur Berichtigung der Gaußchen Osterformel.* Die Sterne *72* (1996), 29–32.

[24] Lichtenberg, H.: *Zur Interpretation der Gauß'schen Osterformel und ihrer Ausnahmeregeln.* Historia Math. *24* (1997), 441–444.

[25] Meyer, A.: *Eine Ableitung der Gaussischen Osterformel.* Blätter f.d. bayer. Gymnasialschulwesen *4* (1868), 227–231.

[26] Neugebauer, O.: *A history of ancient mathematical astronomy, part two.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1975, 622–624.

[27] Novotný, V.: *Velikonoce v našem kalendáři.* PMFA *60* (2015), 39–49.

[28] Oudin, J.-M. [= Frère Namase-Marie]: *Sur la détermination de la date de Pâques. Démonstration générale de la formule de Gauss. Nouvelles formules, très simples, très rapides, en fonction, du seul millésime & Tables pour calculer la date de Pâques par ces formules.* Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Série I *59* (1939), 225–256.

[29] Reints, H.: *Breakdown of the Gauss algorithm* [cit. 22. 11. 2015]. Dostupné z: `http://www.henk-reints.nl/easter/index.htm`

[30] Richter, P. H.: *Kalender und die Gaußsche Osterformel — Was steckt dahinter?* [cit. 22. 11. 2015]. Dostupné z: `http://www-nonlinear.physik.unibremen.de/download/RichterKalenderMittGG44S59-78(2007).pdf`

[31] Tent, M. W. B.: *The prince of mathematics — Carl Friedrich Gauss.* Wellesley, MA 2006.

[32] Určení data Velikonoční neděle. Křesťanské Modřany [cit. 22. 11. 2015]. Dostupné z: `http://www.modranskafarnost.cz/rok-2000/index.php`

[33] Tittel, P.: *Methodus technica, brevis, perfacilis ac perpetua construendi calendarium ecclesiasticum stylo tam novo quam vetere pro cunctis christianis Europae populis, dataque chronologico ecclesiastica omnis aevi examinandi atque determinandi.* Göttingen, 1816.

[34] Wallis, F.: *Bede — the reckoning of time.* Liverpool University Press, 2004.

[35] Wetzel, S.: *Die Oster-Rechnung von Gauß nachbetrachtet für Laien* [cit. 22. 11. 2015]. Dostupné z: `http://www.swetzel.ch/ostern/ostgauss/ostgauss.pdf` `http://www.swetzel.ch/ostern/ostgauss/ostgauss.html`

[36] Wikipedia: *Gaußsche Osterformel* [cit. 22. 11. 2015]. Dostupné z: `http://de.wikipedia.org/wiki/Gaußsche_Osterformel`