Bohuslav Hostinský

O výpočtu pravděpodobností, které se vztahují k časovému vývoji soustav

Aktuárské vědy, Vol. 8 (1948), No. 2, 61–66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144720

O VÝPOČTU PRAVDĚPODOBNOSTÍ, KTERÉ SE VZTAHUJÍ K ČASOVÉMU VÝVOJI SOUSTAV.

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

1. Když r. 1913 vyšly Volterrovy knihy o integrálních rovnicích a o funkčním počtu,[1]) napsal jsem o nich referáty.[2]) Zajímaly mne zejména obecné věty o řešení rovnic integrálních a integrodiferenciálních; nevěděl jsem tehdy, na které úlohy bude možno aplikovati Volterrovu theorii. V letech 1910—20 jsem se mnoho stýkal s p. prof. Schoenbaumem a v dlouhých rozhovorech jsme probírali různé úlohy z analyse, geometrie, mechaniky, theoretické fysiky a zvláště z počtu pravděpodobnosti. Schoenbaum se zajímal na moje upozornění z r. 1913 o Volterrovy theorie. Později svou prací o rozpadu souhrnu osob, který se mění v důsledku úmrtnosti, vstupu do invalidity a možnosti opětné reaktivace,[3]) dokázal, že právě Volterrova theorie zde vede k dokonalému řešení úlohy; dodatek k této práci vyšel později.[4])

Vyložím zde, proč považuji Schoenbaumovu práci za cennou jako vzor k řešení různých úloh statistické fysiky (z oboru nauky o difusi a kinetické theorie plynů).

2. Hlavní výsledek Volterrovy theorie, o kterou se opírá Schoenbaumova theorie, shrnuji takto: Integrální rovnice

$$\varphi(y) = \varphi(a) + \int_a^y K(y, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

kde $K(y, \xi)$ je daná spojitá funkce proměnných y a ξ (jádro integrální rovnice), $\varphi(y)$ neznámá funkce a $\varphi(a)$ její daná hodnota pro $y = a$, má jediné řešení dané rovnicí

$$\varphi(y) = \varphi(a) + \varphi(a) \int_a^y S(y, \xi)\, d\xi; \tag{2}$$

„resolventa“ S je vyjádřena řadou

$$S(y, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} K^{(i)}(y, \xi),$$

při čemž

$$K^{(i+1)} = \int_\xi^y K^{(i)}(y, z)\, K(z, \xi)\, dz, \quad K^{(1)}(y, \xi) = K(y, \xi), \tag{3}$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots$$

[1]) V. VOLTERRA: Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles; Leçons sur les fonctions de lignes (Paris, 1913).

[2]) Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 43, str. 73 a 428; 1914.

[3]) E. SCHOENBAUM: Použití Volterrových integrálních rovnic v matematické statistice (Rozpravy České akademie 26, třída II, č. 26; 1917).

[4]) E. SCHOENBAUM: O jisté integrodiferenciální rovnici (Rozpravy Č. akademie 29, tř. II, č. 15; 1920).

3. Schoenbaumova úloha, kterou rozřešil v citované práci, zní takto: Jak se rozpadá souhrn aktivních osob homogenního složení, vezmeme-li v úvahu jako příčiny změny jeho složení kromě úmrtnosti a vstupu do invalidity též možnost opětného nabývání aktivnosti? Souhrn čítá v určitém okamžiku $l^{aa}(a)$ a-letých osob; toto číslo je dáno. Dále jsou dány intensity úmrtnosti a vstupu do invalidity: to jsou funkce dosaženého stáří; mimo to jsou dány intensita úmrtnosti pro invalidy a intensita reaktivování, kteréžto intensity jsou funkcemi dvou proměnných: dosaženého stáří a doby, po kterou osoba byla invalidní. Schoenbaum ukazuje, že hledaný počet $l^{aa}(x)$ x-letých aktivních osob ($a < x$) vyhovuje integrodiferenciální rovnici tvaru

$$\frac{\mathrm{d}l^{aa}(x)}{\mathrm{d}x} = -\, l^{aa}(x)\, F(x) + \int_a^x l^{aa}(\xi)\, G(x, \xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{4}$$

kde $F(x)$ a $G(x, \xi)$ jsou známé funkce složené určitým způsobem z daných intensit. Jednoduchou úpravou zavádí pomocnou proměnnou místo $l^{aa}(x)$ a ukazuje, že nová proměnná vyhovuje rovnici typu (1). Řešení úlohy, sestrojené na základě řady (2), vychází pak v tomto tvaru:

$$l^{aa}(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots. \tag{5}$$

Zde značí: $\psi_0(x)$ počet těch osob z daného souhrnu, které se dožily stáří x bez přerušení aktivity; $\psi_1(x)$ počet těch, které se dožily stáří x a z nichž každá se stala jen jednou invalidní a jednou byla reaktivována; $\psi_2(x)$ počet těch, které se dožily stáří x a z nichž každá se stala celkem dvakrát invalidní a dvakrát byla reaktivována atd.

Veličina $l^{aa}(x) : l^{aa}(a)$ se rovná pravděpodobnosti, že osoba, náležející uvažovanému souhrnu, dožije se v aktivitě stáří x. Jak levá strana tak jednotlivé členy v řadě na pravé straně rovnice (5) jsou úměrny pravděpodobnostem příslušných případů. Podle mého názoru je význam Schoenbaumovy rovnice (5) nejen v tom, že řeší předloženou úlohu, nýbrž že objasňuje užití této obecné zásady: *Pravděpodobnosti, jež se vztahují k časovému vývoji nějakého souboru, se účelně vyjadřují řadami, jichž každý člen má význam určité pravděpodobnosti, takže správnost takového vyjádření se stává evidentní.*

4. Je-li ve Volterrově rovnici (1) $K(x, \xi)$ spojitá funkce proměnných x a ξ, je $S(y, \xi)$ nekonečná řada a obdobně, považujeme-li v integrodiferenciální rovnici (4) funkce $F(x)$ a $G(x, \xi)$ za spojité, je řada vyskytující se na pravé straně rovnice (5) nekonečná. Hledíme-li však ke skutečnému problému invalidů a jejich reaktivace, máme co činiti jen s konečnou řadou na pravé straně rovnice (5), neboť není možno, aby na př. někdo se stal stokrát invalidním a stokrát byl reaktivován. Smysl rovnice (5) je ten: souhrn x-letých aktivních osob se skládá z osob, které se dožily věku x bez přerušení aktivity, z osob, jež se toho věku dožily a byly jednou reaktivovány, pak z osob dvakrát reaktivovaných atd. Rovnice (5) je tedy samo-

zřejmá; dovedeme-li ji dnes odůvodniti i bez Volterrovy theorie, nesmíme zapomínati, že byla objevena užitím této theorie.

5. Později jsem se zabýval studiemi o difusi; v souvislosti s otázkami o průběhu difuse položil jsem si úlohu, nalézti řešení funkční rovnice

$$\int_a^b \Phi(x, z, s, u)\, \Phi(z, y, u, t)\, dz = \Phi(x, y, s, t) \tag{6}$$

pro

$$a < x < b, \quad a < y < b, \quad s < u < t,$$

které by obsahovalo libovolnou funkci $A(x, y, s)$ tří proměnných; neznámá Φ je funkcí čtyř proměnných. Rovnici (6) jsem nazval rovnicí Chapmanovou podle anglického theoretika S. Chapmana, který se jí po prvé zabýval. Řešení rovnice (za určitých podmínek položených ve shodě s úlohami o difusi) je odvozeno ve třech pracích, které jsem vydal v letech 1932—38;[5]) užíval jsem methody, kterou nazývám integrací lineárních funkčních transformací a která je zobecněním methody použité Volterrou k řešení diferenciálních rovnic lineárních.[6])

Hledaná funkce $\Phi(x, y, s, t)$ se vyjadřuje nekonečnou řadou; později jsem shledal, že vyložíme-li význam jednotlivých členů, lze řadu odůvodniti jednoduše, bez integrování lineárních transformací.[7]) Funkce $\Phi(x, y, s, t)$ udává pravděpodobnost (vlastně hustotu pravděpodobnosti) přechodu (v nejjednodušším případě běží o přechod bodu pohybujícího se po přímce z polohy x do polohy y); v okamžiku s je soustava v konfiguraci x, v okamžiku t pak v konfiguraci y. Výsledek, k němuž jsem došel, potvrzuje správnost obecné zásady, kterou jsem vyslovil shora na konci odst. 3. Konečná formule je poměrně jednoduchá a přehledná, byla však získána dosti složitými výpočty. V odst. 6 uvedu hlavní výsledky, jež jsem odvodil pro případ, že $\Phi(x, y, s, t)$ je funkcí jen tří proměnných, totiž x, y a rozdílu $t - s$ (t. j. doby, za kterou soustava přejde z konfigurace x do y). Chapmanova rovnice (6) přechází v tomto případě v rovnici Smoluchowského; za předpokladu, že jde o pohyb bodu určeného úsečkou x na kladné ose $0x (0 \leqq x \leqq \infty)$, zní rovnice Smoluchowského takto:

$$\int_0^\infty \varphi(x_0, z, u)\, \varphi(z, x, v)\, dz = \varphi(x_0, x, u + v). \tag{7}$$

Smysl rovnice (7) je ten: $\varphi(x_0, z, u)\, dz$ je pravděpodobnost, že bod přejde

[5]) Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university v Brně č. 156, 194, 261).

[6]) V. VOLTERRA-B. HOSTINSKÝ: Opérations infinitésimales linéaires (Paris, 1939).

[7]) Résolution d'un probléme général de la théorie de la diffusion (Comptes Rendus t. 206, 1452; 1938). — Sur une équation générale de la mécanique statistique (tamtéž t. 207, 522; 1938). — O pravděpodobnostech změn v soustavě, která se vyvíjí během času (Rozpravy Č. akademie, 50, tř. II, č. 26; 1940).

z polohy x_0 do polohy mezi z a $z + \mathrm{d}z$ za u vteřin; funkce stojící za integračním znamením, násobená $\mathrm{d}x$, je pravděpodobnost, že bod přejde za prvních u vteřin z polohy x_0 do polohy mezi z a $z + \mathrm{d}z$ a pak za dalších v vteřin odtud do polohy mezi x a $x + \mathrm{d}x$; integrujíce podle z od 0 do ∞ dostaneme úhrnnou pravděpodobnost $\varphi(x_0, x, u + v)\,\mathrm{d}x$ přechodu z x_0 do polohy mezi x a $x + \mathrm{d}x$ za $u + v$ vteřin.

6. Abychom odvodili řešení rovnice (7) obsahující libovolnou funkci $a(x, y)$ dvou proměnných, předpokládáme, že změna polohy bodu se řídí zákonem pravděpodobnosti přechodu, t. j. že existuje pravděpodobnost $p(x_0, x, t)\,\mathrm{d}x$, že bod, jenž je původně v poloze x_0, bude po t vteřinách v poloze obsažené mezi x a $x + \mathrm{d}x$. Funkci $p(x_0, x, t)$ nazveme *pravděpodobností obyčejného přechodu.* Tato pravděpodobnost, jež nezávisí na tom, jak bod měnil svou polohu před tím, než se dostal do polohy x, nechť vyhovuje podmínkám

$$\begin{aligned}
&p(x_0, x, t) > 0, \ x_0 > 0, \ x > 0, \ t > 0 \\
&\int_0^\infty p(x_0, x, t)\,\mathrm{d}x = 1, \ x_0 > 0, \ t > 0 \\
&\int_0^\infty p(x_0, z, u)\, p(z, x, v)\,\mathrm{d}z = p(x_0, x, u + v) \\
&\text{pro } x_0 > 0, \ x > 0, \ u > 0, \ v > 0 \\
&\lim_{t \to 0} p(x_0, x, t) = 0 \ \text{pro} \ x_0 \neq x \\
&\lim_{t \to 0} \frac{p(x_0, x, t)}{t} = 0 \ \text{pro} \ x_0 \neq x.
\end{aligned} \tag{8}$$

Poslední dvě podmínky vyjadřují spojitost obyčejného přechodu: je nekonečně málo pravděpodobno, že během nekonečně krátké doby změní se úsečka bodu o konečný přírůstek.

Předpokládejme nyní, že mohou nastati i náhlé změny, že úsečka x bodu se může zvětšiti o konečný přírůstek během nekonečně krátkého časového intervalu $t \ldots t + \mathrm{d}t$. Zákon takových náhlých změn vyjádříme takto: existuje *pravděpodobnost náhlého přechodu* $a(x_0, x)$, což znamená, že $a(x_0, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ je pravděpodobnost, že během časového intervalu o délce $\mathrm{d}t$ přejde úsečka bodu z hodnoty x_0 na hodnotu obsaženou v mezích x a $x + \mathrm{d}x$. Předpokládejme, že $a(x_0, x)$ vyhovuje podmínkám

$$\begin{aligned}
&a(x_0, x) > 0 \ \text{pro} \ x_0 > 0, \ x > 0 \\
&\int_0^\infty a(x_0, x)\,\mathrm{d}x = a(x_0) < 1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Připusťme dále, že bod se pohybuje tak, že je určitá pravděpodobnost obyčejného přechodu z polohy x_0 do x za dobu t, totiž $p_1(x_0, x, t)$, avšak že náhlé přechody jsou možné a mají svůj zákon pravděpodobnosti vyjádřený vztahy (9). Pravděpodobnost $p_1(x_0, x, t)$ je při daném x_0, x a t menší než $p(x_0, x, t)$, neboť tato poslední se vztahuje k obyčejným přechodům, při nichž náhlé přechody jsou vůbec vyloučeny. Vztah mezi p a p_1 zní[8])

$$p(x_0, x, t) = p_1(x_0, x, t) + \int_0^t \int_0^\infty p(x_0, z, u)\, a(z)\, p_1(z, x, t - u)\, dz\, du.$$

Funkci $p(x_0, x, t)$ lze voliti různými způsoby tak, aby bylo vyhověno podmínkám (8); funkce $a(x_0, x)$ je vlastně libovolná funkce dvou proměnných, omezená jen vztahy (9). Znajíce p a a určíme p_1 [viz citovanou práci [8])] a konečně hledané řešení rovnice (7), totiž funkci $\varphi(x_0, x, t)$, která udává pravděpodobnost přechodu z x_0 do x za t vteřin, při čemž se připouští, že během doby t mohlo dojíti k náhlému přechodu $n$krát, kde n je libovolné číslo. Funkce $\varphi(x_0, x, t)$ se vyjádří takto:

$$\varphi(x_0, x, t) = p_1(x_0, x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_0, x, t), \tag{10}$$

kde A_1 je trojnásobný integrál rovný pravděpodobnosti obyčejného přechodu přerušeného jediným náhlým přechodem; A_2 je šestinásobný integrál rovný pravděpodobnosti obyčejného přechodu přerušeného dvěma náhlými přechody atd. Uvádím rovnice pro A_1 a A_2:

$$A_1 = \int_{u_1=0}^{t} \int_0^\infty \int_0^\infty p_1(x_0, z_1, u_1)\, a(z_1, z_2)\, p_1(z_2, x, t - u_1)\, dz_1\, dz_2\, du_1$$

$$A_2 = \int_{u_2=0}^{t} \int_{u_1=0}^{u_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty p_1(x_0, z_1, u_1)\, a(z_1, z_2)\, p_1(z_2, z_3, u_2 - u_1)\, a(z_3, z_4)\, .$$
$$.\, p_1(z_4, x, u - u_2)\, dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4\, du_1\, du_2.$$

7. Funkce $\varphi(x_0, x, t)$, které vyhovují rovnici (7) a které lze vyjádřiti řadami tvaru (10), vyskytují se v rozmanitých úlohách.

Tak lze vyložiti $\varphi(x_0, x, t)$ jako pravděpodobnost, že počet obyvatelstva v nějaké zemi přejde po uplynutí doby t z původní hodnoty x_0 na hodnotu obsaženou mezi x a $x + dx$; při tom předpokládáme, že vedle spojitých obyčejných změn populace mohou nastati náhlé změny (náhlé zmenšení populace účinkem katastrofy), jimž odpovídají pravděpodobnosti p a a, jak bylo naznačeno v odst. 6. O tom jsem psal v uvedené práci [8]).

Stejný matematický problém se vyskytuje v theorii difuse a v kinetické theorii plynů [viz mé citované články [7]) z r. 1938]. Všimněme si

[8]) Viz mou práci „O časovém vývoji souborů" (Rozpravy Jednoty pro vědy pojistné č. 22, 1941), kde je podrobně odůvodněn vztah mezi p a p_1 a odvozena rovnice pro funkci $\varphi(x_0, x, t)$.

posledního případu. Zde nepřichází v úvahu pohyb bodu po přímce jako v odst. 8, nýbrž pohyb bodu χ, jenž v mnohorozměrném prostoru znázorňuje vývoj plynu. Počet souřadnic rovná se počtu všech obyčejných souřadnic, kterými se stanoví polohy jednotlivých molekul, po případě jejich rychlosti. Bod χ, znázorňující stav plynu, se pohybuje spojitě, pokud se molekuly pohybují spojitě (pod vlivem vzájemné přitažlivosti, pod vlivem tíže a pod.), t. j. pokud některá molekula nenarazí buď na jinou molekulu, nebo na stěnu nádoby. V okamžiku nárazu mění se rychlost bodu χ nespojitě. Poněvadž, jak předpokládáme, nejsou počáteční polohy a rychlosti molekul úplně přesně známy, nejsou známy přesně jejich dráhy; proto zavádíme jednak pravděpodobnosti vztahující se ke spojitým (obyčejným) změnám souřadnic bodu χ, jednak pravděpodobnosti vztahující se k náhlým změnám časových derivací souřadnic bodu χ v tom smyslu, jak bylo vyloženo v odst. 6.

Tyto pravděpodobnosti nebyly nikdy číselně vyjádřeny; problém je velice složitý, poněvadž v každém cm^3 plynu je mnoho molekul a bylo by nutno při výpočtu oněch pravděpodobností přihlédnouti k tomu, jak se rozdělení poloh a rychlostí mění tím, že molekuly narážejí jedny na druhé a na stěny nádoby. Podaří-li se jednou přibližně vyjádřiti pravděpodobnosti přechodů, bude možno formulovati některé úlohy kinetické theorie — ve smyslu úvah vyložených v odst. 6 — dokonaleji než dosud; dosavadní kinetická theorie je nucena užívati předpokladů odvážně zjednodušených.

8. Srovnejme Schoenbaumovo řešení (5) úlohy o rozpadu souboru původně aktivních osob s řešením (10) rovnice Smoluchowského. V obou případech je hledaná pravděpodobnost vyjádřena řadou, jejíž každý člen sám o sobě představuje určitou pravděpodobnost, takže, máme-li na zřeteli význam jednotlivých členů, platnost rovnic (5) a (10) je evidentní. Tvar řešení odpovídá obecné zásadě vyslovené na konci odst. 3. V prvním případě podařilo se poměrně jednoduchým způsobem vyjádřiti členy ψ_0, ψ_1, ψ_2, ... řady stojící na pravé straně rovnice (5), takže řešení je úplné; k numerickému výpočtu stačí omeziti řadu jen na několik málo prvních členů. Naproti tomu udává pravá strana rovnice (10), máme-li na mysli zmíněný problém kinetické theorie plynů (odst. 7), jen všeobecný tvar hledané pravděpodobnosti, kterou nelze vyčísliti pro nesmírnou složitost úlohy; i kdyby se podařilo vypočísti členy $A_k(x_0, x, t)$, musili bychom vzíti na pravé straně rovnice (10) v úvahu velmi veliký počet členů, poněvadž každá molekula plynu prodělá velmi mnoho nárazů za vteřinu; první člen řady odpovídá případu, kdy došlo jen k jednomu nárazu během dané doby, druhý člen případu, kdy došlo ke dvěma atd. Domnívám se, že formule toho druhu jako (10) zaslouží si zvláštní pozornosti v úvahách o pravděpodobnostech časových změn, nechť se jedná o úlohy theoretické fysiky nebo z jiných oborů, neboť objasňují matematickou povahu takových úloh i v případech, kdy se nehodí k numerickým výpočtům.