Nikolaj Podtjagin

Quelques remarques sur la méthode de Lidston dans l’assurance sur la vie. II.

Aktuárské vědy, Vol. 7 (1938), No. 4, 142–154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144700

Aus Relation (3) ergibt sich, daß wenn $p_x^{(z)} > p_x$ ist, $k_{x,z}$ einigermaßen unterschätzt ist, wenn wir $k_{x,z}$ auf das Kollektiv der lebenden Versicherten beziehen. In der Pensionsversicherung interessiert uns jedoch vor allem die relative Kinderzahl der Versicherten im Zeitpunkte ihres Ablebens, die bedeutend niedriger ist. Daraus können wir schließen, daß die Zahl der Kinder der Versicherten im Zeitpunkte des Ablebens etwas überschätzt ist. Bei den Waisenrenten, die in den Jahren 1929 bis 1934 angefallen sind, zeigt sich dies in den Altersklassen bis zum 40 Jahre. In den Altersklassen über 50 Jahren sind die erhobenen Zahlen ungefähr um $^1/_3$ höher als die erwarteten; erst eine künftige Erhebung wird zeigen, ob diese Abweichung zufällig und durch eine erhöhte Geburtenhäufigkeit in den ersten Nachkriegsjahren verursacht ist, oder ob sie andere Ursachen hat.

Quelques remarques sur la méthode de Lidston dans l'assurance sur la vie.

N. Podtiaguine, Praha. (La suite.)

Le tableau VIII donne les valeurs de l'annuité $a_{x\overline{n}|}$ calculées par la formule (11).

Tableau VIII.

x	n	$a_{x\overline{n}\|}$	Formule (11)		
			valeur	erreur absolue	erreur relative en %
20	10	8,425	8,425	0,000	0,00
	20	14,036	14,035	—0,001	—0,01
	30	17,648	17,647	—0,001	—0,01
	40	19,812	19,811	—0,001	—0,01
	50	20,927	20,926	—0,001	0,00
	60	21,347	21,359	+0,012	+0,06
30	10	8,354	8,354	0,000	0,00
	20	13,732	13,731	—0,001	—0,01
	30	16,955	16,954	—0,001	—0,01
	40	18,615	18,611	—0,004	—0,02
	50	19,240	19,242	+0,002	+0,01
40	10	8,203	8,203	0,000	—0,00
	20	13,119	13,118	—0,001	—0,01
	30	15,651	15,643	—0,008	—0,05
	40	16,604	16,584	—0,020	—0,12
50	10	7,894	7,894	0,000	0,00
	20	11,961	11,951	—0,010	—0,08
	30	13,491	13,441	—0,050	—0,37
60	10	7,293	7,290	—0,003	—0,04
	20	10,037	9,977	—0,060	—0,60
70	10	6,235	6,209	—0,026	—0,42

Nous voyons ainsi que la formule (11) permet de calculer l'annuité viagère temporaire discontinue avec une remarquablement bonne approximation: l'erreur relative reste inférieure à 0,6% pour tout l'âge-terme $s = x + n$ qui ne dépasse pas 80 ans.

Pour montrer que la série (10) peut être bien utilisée pour le calcul de l'annuité $a_{x\overline{n}|}$, nous donnons le tableau de ses valeurs calculées avec trois et quatre termes de cette série (tableau IX).

On voit de ce tableau que la série (10) avec ses 4 termes donné déjà la valeur précise de l'annuité $a_{x\overline{n}|}$, si $x + n \leqq 70$. Il n'y a que deux valeurs de cette annuité qui différent de celles données par le Bureau Fédéral des Assurances. Nous avons récu, en effet,

$$a_{20,\overline{20}|} = 14{,}035, \quad a_{20,\overline{30}|} = 17{,}647,$$

tandis que les tables du Bureau nous donnent

$$a_{20,\overline{20}|} = 14{,}036, \quad a_{20,\overline{30}|} = 17{,}648.$$

Mais les tableaux VI et IX nous montrent que les premières valeurs sont plus exactes.

Vu les bons résultats que donne la formule approchée (11), nous pouvons nous demander si, en partant de cette formule, nous pourrions

Tableau IX.

x	n	$a_{x\overline{n}\|}$	Série (10) avec le nombre de termes: 3		4	
			valeur	déviation	valeur	déviation
20	10	8,425	8,425	0,000	8,425	0,000
	20	14,036	14,035	—0,001	14,035	—0,001
	30	17,648	17,647	—0,001	17,647	—0,001
	40	19,812	19,812	0,000	19,812	0,000
	50	20,927	20,928	0,001	20,927	0,000
	60	21,347	21,355	0,008	21,349	0,002
30	10	8,354	8,354	0,000	8,354	0,000
	20	13,732	13,732	0,000	13,732	0,000
	30	16,955	16,955	0,000	16,955	0,000
	40	18,615	18,615	0,000	18,615	0,000
	50	19,240	19,248	0,008	19,242	0,002
40	10	8,203	8,203	0,000	8,203	0,000
	20	13,119	13,119	0,000	13,119	0,000
	30	15,651	15,651	0,000	15,651	0,000
	40	16,604	16,609	0,005	16,607	0,003
50	10	7,894	7,894	0,000	7,894	0,000
	20	11,961	11,960	—0,001	11,961	0,000
	30	13,491	13,490	—0,001	13,493	0,002
60	10	7,293	7,293	0,000	7,293	0,000
	20	10,037	10,029	—0,008	10,038	0,001
70	10	6,235	6,231	—0,004	6,235	0,000

calculer, comme dans la méthode de Lidston, la valeur actuelle totale des primes à payer par un groupe d'assurés d'âges différents, mais devant payer tous le même nombre n de primes.

Nous pouvons, tout d'abord, mêtre la formule (11) sous la forme

$$a_{x\overline{n}|} = a_0(n) - m(n)\, \Delta a_0(n) \frac{\lambda(x)\, c^n}{m(n)\, c^n + \lambda(x)\, c^n}$$

ou, d'après l'égalité (6),

$$a_{x\overline{n}|} = a_0(n) - m(n)\, \Delta a_0(n) \frac{\lambda(x+n)}{m(n)\, c^n + \lambda(x+n)}. \tag{12}$$

Or, le produit $m(n)\, c^n$, comme nous montre le tableau X, ne change pas beaucoup avec n.

Tableau X.

n	$m(n)\, c^n$
5	11,23182
10	6,64769
20	4,89662
30	4,67104
40	4,80102
50	5,03797
60	5,28861
70	5,51267
80	5,69581

Ce n'est que pour les valeurs petites de n qu'il prend des valeurs sensiblement supérieures. Mais le second terme du second membre de la formule (12) a, en général, pour ces valeurs de n des valeurs petites.

Nous pouvons donc poser

$$m(n)\, c^n = \gamma,$$

γ étant une constante.

La formule (12) prend alors la forme

$$a_{x\overline{n}|} = a_0(n) - \frac{\gamma\, \Delta a_0(n)}{c^n} \cdot \frac{\lambda(x+n)}{\gamma + \lambda(x+n)}. \tag{13}$$

Le tableau XI donne les valeurs de l'annuité $a_{x\overline{n}|}$ calculées par la formule (13), en prenant pour la constante γ la valeur 4,9.

Nous voyons ainsi que la formule (13) donne vraiment de très bons résultats. La comparaison de ce tableau avec le tableau V nous montre surtout la préférence de cette formule devant le développement lidstonien.

Considérons maintenant un groupe de contrats, pour lesquels le nombre n des primes restant à payer est le même, mais reposant sur

Tableau XI.

x	n	$a_{x\overline{n}\vert}$	Formule (13)		
			valeur	déviation	erreur relative en %
20	2	1,962	1,962	0,000	0,00
	5	4,629	4,629	0,000	0,00
	10	8,425	8,425	0,000	0,00
	20	14,036	14,035	—0,001	—0,01
	30	17,648	17,646	—0,002	—0,01
	40	19,812	19,809	—0,003	—0,02
	50	20,927	20,934	0,007	0,03
30	2	1,960	1,960	0,000	0,00
	5	4,613	4,614	0,001	0,02
	10	8,354	8,354	0,000	0,00
	20	13,732	13,731	—0,001	—0,01
	30	16,955	16,949	—0,006	—0,04
	40	18,615	18,604	—0,011	—0,06
40	2	1,957	1,957	0,000	0,00
	5	4,579	4,580	0,001	0,02
	10	8,203	8,206	0,003	0,04
	20	13,119	13,117	—0,002	—0,02
	30	15,651	15,624	—0,027	—0,17
50	2	1,949	1,950	0,001	0,05
	5	4,508	4,512	0,004	0,09
	10	7,894	7,905	0,011	0,14
	20	11,961	11,951	—0,010	—0,08
60	2	1,934	1,936	0,002	0,10
	5	4,361	4,377	0,016	0,37
	10	7,293	7,335	0,042	0,58

les têtes ayant à l'inventaire les âges ronds $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_q$. Soient L_{x_i} le nombre des têtes ayant l'âge x_i et P_{x_i} la prime que paye chaque d'elles.

En appliquant la formule (13), on a pour la valeur actuelle totale des primes du groupe

$$\sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} a_{x_i\overline{n}\vert} = a_0(n) \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} - \frac{\gamma \, \Delta a_0(n)}{c^n} \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \frac{\lambda(x_i + n)}{\gamma + \lambda(x_i + n)}.$$

Pour l'âge auxiliaire y, qui est défini par l'égalité

$$a_{y\overline{n}\vert} \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} a_{x_i\overline{n}\vert},$$

nous aurons donc la relation approchée

$$\frac{\lambda(y+n)}{\gamma + \lambda(y+n)} \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \frac{\lambda(x_i + n)}{\gamma + \lambda(x_i + n)}.$$

En posant, pour simplifier l'écriture,

$$A = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \frac{\lambda(x_i + n)}{\gamma + \lambda(x_i + n)},$$

$$B = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i},$$

on en trouve

$$\lambda(y + n) = \frac{\gamma A}{B - A},$$

ou, d'après l'égalite (6),

$$c^y = \frac{\gamma A}{(B - A)\,\lambda(n)}. \tag{14}$$

Le produit

$$P_{x_i} \frac{\lambda(x_i + n)}{\gamma + \lambda(x_i + n)},$$

qui conserve sa valeur pendant toute la durée du contrat, peut être calculé, lors de la souscription, une fois pour toutes. En faisant la somme de tous ces produits, lors de chaque inventaire, on obtient la valeur de A. On calcule alors l'âge auxiliaire y par la formule (14), où B est la prime totale du groupe.

Nous voyons ainsi que le procédé n'est nullement plus compliqué que dans la méthode de Lidston.

Pour nous rendre compte de l'exactitude que peut fournir la méthode indiquée, considérons les cinq exemples indiqués dans le tableau XII.

Tableau XII.

x	Exemple I $n = 2$		Exemple II $n = 5$		Exemple III $n = 10$		Exemple IV $n = 20$		Exemple V $n = 30$	
	L_x	P_x	L_x	P_x	L_x	P_x	L_x	P_x	L_x	P_x
20					10	200	15	200	20	300
30	10	200	15	150	15	250	20	250	35	400
40	15	250	20	200	20	300	30	350	30	350
50	20	300	25	250	30	350	35	400		
60	25	350	30	350	25	300				

Les âges auxiliaires calculés par la formule (14) et par la méthode de Lidston sont donnés par le tableau XIII.

Les résultats auxquels on arrive avec ces âges auxiliaires sont donnés par le tableau XIV.

Tableau XIII.

	Age auxiliaire	
	Formule (14)	Méthode de Lidston
Exemple I.....	53,35	53,58
Exemple II ...	53,67	53,96
Exemple III...	49,80	50,28
Exemple IV ...	43,43	43,82
Exemple V	33,02	33,33

Tableau XIV.

Exemple	Valeur actuelle totale des primes						
	Méthode exacte	Formule (14)			Méthode de Lidston		
		valeur	déviation	erreur relative en %	valeur	déviation	erreur relative en %
I	39 876	39 873	— 3	—0,008	39 873	— 3	—0,008
II	102 661	102 695	34	0,033	102 626	— 35	—0,034
III	234 980	235 085	105	0,045	234 490	— 490	—0,209
IV	415 971	415 870	—101	—0,024	414 538	—1 433	—0,344
V	507 593	507 490	—103	—0,020	506 361	—1 232	—0,243
total	1 301 081	1 301 013	— 68	—0,005	1 297 888	—3 193	—0,245

De l'examen du tableau XIV, on peut conclure que notre méthode donne de très bons résultats: l'erreur est, en général, beaucoup plus petite que dans la méthode de Lidston. Dans tous les exemples considérés, l'erreur relative est inférieure à 0,05%; Elle est donc moindre que l'erreur relative experimentale affectant l'annuité viagère temporaire.[4]) Dans l'ensemble de tous nos exemples elle baisse même jusqu'à 0,005% et dévient donc absolument négligeable.

Il n'est pas sans intérêt de comparer notre formule (11)

$$a_{x\overline{n|}} = a_0(n) - m(n)\, \Delta a_0(n)\, \frac{\lambda(x)}{m(n) + \lambda(x)} \tag{15}$$

avec celle de M. Charles L. Stoodley donnée par lui dans son mémoire: „Approximations to the Values of Certain Actuarial Functions leading to Suggested Chek Methods of Valuation of Endowment Assurances.“[5])

[4]) Voir, par exemple: H. Galbrun, Assurances sur la vie. Calcul des primes, p. 112.

[5]) Transactions of the Faculty of Actuaries. London, 1934, p. 1.

En posant dans la formule (15)

$$m(n) = -1,$$

on a

$$a_{x\overline{n|}} = a_0(n) - \Delta a_0(n)\,\frac{\lambda(x)}{1-\lambda(x)},$$

ou

$$a_{x\overline{n|}} = a_0(n) - \Delta a_0(n)\,\frac{c^x}{a-c^x},$$

si nous posons encore

$$a = \frac{1}{-\log g}.$$

C'est bien la formule de M. Stoodley qu'il écrit sous la forme

$$a_{x\overline{n|}} = a_1(n) - [a_1(n) - a_0(n)]\,\frac{a}{a-c^x}. \tag{16}$$

Il résulte de tout ce que nous avons dit plus haut que cette formule ne peut donner de bons résultats, si s, g et c sont les constantes de Makeham.

Or, la formule (16) serait rigoureusement exacte, si la loi de survie pouvait être exprimée par la fonction

$$l_x = ks^x\,(1 + c^x \log g) \tag{17}$$

qui n'est autre chose que la première approximation de la loi de Makeham représentée par la série convergente

$$l_x = ks^x g^{c^x} = ks^x\left[1 + c^x \log g + \frac{c^{2x}}{2!}(\log g)^2 + \frac{c^{3x}}{3!}(\log g)^3 + \ldots\right].$$

En effet, en introduisant nos significations, on aura, d'après l'égalité (17)

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{e^{-\alpha t}\,[1-\lambda(x)\,.\,c^t]}{1-\lambda(x)}$$

et, par conséquent,

$$a_{x\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} e^{-\delta t}\,\frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{1}{1-\lambda(x)}\sum_{t=0}^{n-1} c^{-kt}\,[1-\lambda(x)\,c^t] =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda(x)}\left[\sum_{t=0}^{n-1} c^{-kt} - \lambda(x)\sum_{t=0}^{n-1} c^{(1-k)t}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda(x)}\,[a_0(n) - a_1(n)\,\lambda(x)],$$

ou

$$a_{x\overline{n}|} = a_0(n) - \Delta a_0(n)\ \frac{\lambda(x)}{1 - \lambda(x)}.$$

Il en résulte la formule (16).

Suivant les calculs de M. Stoodley les tables anglaises O^M, $O^{M(5)}$ et A 1924—29 peuvent êtres représentées avec une suffisamment bonne approximation par la formule (17).

La méthode, par laquelle nous avons reçu l'expression (5) pour l'annuité viagère discontinue $a_{x\overline{n}|}$, peut être appliquée aussi pour le calcul de l'annuité continue

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_tp_x\, \mathrm{d}t.$$

En introduisant de nouveau les significations indiquées plus haut, on aura

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = e^{\lambda(x)} \int_0^n c^{-kt}\ e^{-c^t \lambda(x)}\, \mathrm{d}t.$$

Or

$$e^{-c^t\lambda(x)} = 1 - \lambda c^t + \frac{\lambda^2}{2!}\, c^{2t} - \frac{\lambda^3}{3!}\, c^{3t} + \dots$$

Nous avons donc

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = e^{\lambda}\left[\int_0^n c^{-kt}\, \mathrm{d}t - \lambda \int_0^n c^{(1-k)t}\, \mathrm{d}t + \frac{\lambda^2}{2!}\int_0^n c^{(2-k)t}\, \mathrm{d}t - \dots\right] =$$

$$= e^{\lambda}\left[\frac{c^{-kn} - 1}{-k\log c} - \lambda\, .\, \frac{c^{(1-k)n} - 1}{(1-k)\log c} + \frac{\lambda^2}{2!}\cdot\frac{c^{(2-k)n} - 1}{(2-k)\log c} - \dots\right].$$

En posant ici

$$\bar{a}_j(n) = \frac{c^{(j-k)n} - 1}{j - k},$$

nous recevons l'égalité

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \frac{e^{\lambda}}{\log c}\left[\bar{a}_0(n) - \lambda\, \bar{a}_1(n) + \frac{\lambda^2}{2!}\bar{a}_2(n) - \frac{\lambda^3}{3!}\, \bar{a}_3(n) + \dots\right].$$

On en trouve, comme plus haut,

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \frac{1}{\log c}\left[\bar{a}_0(n) - \lambda\, \Delta\bar{a}_0(n) + \frac{\lambda^2}{2!}\, \Delta^2\bar{a}_0(n) - \frac{\lambda^3}{3!}\, \Delta^3\bar{a}_0(n) + \dots\right]. \quad (18)$$

Tableau XV.

n	$\bar{a}_0(n)$	$\bar{a}_1(n)$	$\bar{a}_2(n)$
10	0,63498	0,92978	1,42815
20	1,07049	2,29638	5,92650
30	1,36920	4,30501	20,09532
40	1,57407	7,25733	64,72396
50	1,71458	11,59666	205,29430
60	1,81096	17,97464	648,05973
70	1,87706	27,34904	2 042,67252
80	1,92240	41,12762	6 435,39406

n	$\bar{a}_3(n)$	$\bar{a}_4(n)$
10	2,29512	3,84134
20	17,78700	59,40637
30	122,35613	863,15524
40	828,19067	12 489,3907
50	5 592,52613	180 662,995
60	37 751,4647	2 613 296,48
70	254 822,095	37 801 355,4
80	1 720 033,63	546 797 148

n	$\Delta\,\bar{a}_0(n)$	$\frac{1}{2}\,\Delta^2\bar{a}_0(n)$	$\frac{1}{3!}\,\Delta^3\bar{a}_0(n)$
10	0,29480	0,10178	0,02750
20	1,22589	1,20212	0,97102
30	2,93582	6,42725	12,26933
40	5,68326	25,89169	109,03612
50	9,88207	91,90779	834,95310
60	16,16368	306,96071	5 976,56640
70	25,47198	994,92575	41 462,3747
80	39,20522	3 177,53061	283 474,819

n	$\frac{1}{4!}\,\Delta^4\bar{a}_0(n)$
10	0,00607
20	0,65427
30	19,93549
40	397,39652
50	6 644,99935
60	102 754,537
70	1 533 092,31
80	22 498 144,3

Les raisonnements analogues à ceux que nous avons faits à propos de la série (5) nous montrent que la série qui se trouve dans les crochets de l'égalité (18) est une série convergente.

Pour nous rendre compte de la grandeur des fonctions $\bar{a}_j(n)$ et leurs différences, nous donnons dans le tableau XV les valeurs des fonctions $\bar{a}_0(n)$, $\bar{a}_1(n)$, $\bar{a}_2(n)$, $\bar{a}_3(n)$, $\bar{a}_4(n)$ et leurs différences $\Delta\bar{a}_0(n)$, $\Delta^2\bar{a}_0(n)$, $\Delta^3\bar{a}_0(n)$, $\Delta^4\bar{a}_0(n)$.

Le tableau XVI contient les valeurs de l'annuité $\bar{a}_{x\overline{n}|}$ calculées par la série (18), en y conservant 2, 3, 4 et 5 termes. Pour nous faire une idée de l'approximation que comporte la série (18), nous les comparons dans ce tableau avec les valeurs de $\bar{a}_{x\overline{n}|}$ calculées par la formule connue[6])

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = a_{x,\overline{n+1}|} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) - \frac{1}{12}\left[\delta\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) + \mu_x - \mu_{x+n}\cdot\frac{D_{x+n}}{D_x}\right] \tag{19}$$

En posant dans l'égalité (18)

$$z = z(x, n) = \frac{\lambda(x)}{m(n) + \lambda(x)},$$

Tableau XVI.

x	n	Formule (19)	Série (18) avec le nombre de termes:			
			2		3	
			valeur	déviation	valeur	déviation
20	10	8,260	8,260	0,000	8,260	0,000
	20	13,754	13,749	—0,005	13,754	0,000
	30	17,283	17,255	—0,028	17,283	0,000
	40	19,386	19,279	—0,107	19,394	0,008
	50	20,458	20,109	—0,349	20,517	0,059
	60	20.853	19,856	—0,997	21,221	0,368
30	10	8,180	8,178	—0,002	8,180	0,000
	20	13,434	13,410	—0,024	13,435	0,001
	30	16,566	16,444	—0,122	16,576	0,010
	40	18,163	17,711	—0,452	18,239	0,076
	50	18,750	17,381	—1,369	19,248	0,498
40	10	8,013	8,004	—0,009	8,013	0,000
	20	12,791	12,685	—0,106	12,798	0,007
	30	15,225	14,708	—0,517	15,310	0,085
	40	16,121	14,349	—1,772	16,776	0,655
50	10	7,672	7,630	—0,042	7,674	0,002
	20	11,582	11,131	—0,451	11,649	0,067
	30	13,020	10,986	—2,034	13,753	0,733
60	10	7,012	6,829	—0,183	7,031	0,019
	20	9,592	7,801	—1,791	10,178	0,586
70	10	5,863	5,113	—0,750	6,037	0,174

[6]) Voir, par exemple: H. Galbrun, Assurances sur la vie. Calcul des primes, p. 118.

x	n	Formule (19)	Série (18) avec le nombre de termes: 4		5	
			valeur	déviation	valeur	déviation
20	10	8,260	8,260	0,000	8,260	0,000
	20	13,754	13,754	0,000	13,754	0,000
	30	17,283	17,282	—0,001	17,282	—0,001
	40	19,386	19,385	—0,001	19,386	0,000
	50	20,458	20,449	—0,009	20,458	0,000
	60	20,853	20,735	—0,118	20,869	0,016
30	10	8,180	8,180	0,000	8,180	0,000
	20	13,434	13,434	0,000	13,434	0,000
	30	16,566	16,566	0,000	16,566	0,000
	40	18,163	18,151	—0,012	18,164	0,001
	50	18,750	18,575	—0,175	18,785	0,035
40	10	8,013	8,013	0,000	8,013	0,000
	20	12,791	12,790	—0,001	12,791	0,000
	30	15,225	15,213	—0,012	15,227	0,002
	40	16,121	15,912	—0,209	16,178	0,057
50	10	7,672	7,672	0,000	7,672	0,000
	20	11,582	11,573	—0,009	11,582	0,000
	30	13,020	12,797	—0,223	13,078	0,058
60	10	7,012	7,010	—0,002	7,011	—0,001
	20	9,592	9,433	—0,159	9,628	0,036
70	10	5,863	5,830	—0,033	5,868	0,005

où

$$\overline{m} = \overline{m}(n) = \frac{2\Delta\bar{a}_0(n)}{\Delta^2\bar{a}_0(n)},$$

on obtient, comme dans le cas de l'annuité discontinue, la série

$$\bar{a}_{x\overline{n|}} = \frac{1}{\log c}\left[\bar{a}_0(n) - z\,\overline{b}_1(n) - \frac{z^3}{3!}\overline{b}_3(n) + \frac{z^4}{4!}\overline{b}_4(n) - \ldots\right], \tag{20}$$

avec

$$\overline{b}_1(n) = \overline{m}\Delta\bar{a}_0$$
$$\overline{b}_3(n) = \overline{m}(\overline{m}^2\Delta^3\bar{a}_0 - 6\Delta\bar{a}_0)$$
$$\overline{b}_4(n) = \overline{m}(\overline{m}^3\Delta^4\bar{a}_0 - 12\overline{m}^2\Delta^3\bar{a}_0 + 48\Delta\bar{a}_0)$$
. . . .
. . . .

Dans le tableau XVII nous donnons les valeurs des coefficients $\overline{b}_1(n)$, $\overline{b}_3(n)$ et $\overline{b}_4(n)$.

En ne conservant dans la série (20) que ses deux premiers membres, on aura la formule approchée

Tableau XVII.

n	$\overline{b}_1(n)$	$\frac{1}{3!}\overline{b}_3(n)$	$\frac{1}{4!}\overline{b}_4(n)$
10	0,85384	—0,18557	0,12986
20	1,25012	—0,22036	0,11853
30	1,34101	—0,17169	0,04192
40	1,24748	—0,09434	—0,04194
50	1,06254	—0,02465	—0,10045
60	0,85113	0,02149	—0,12558
70	0,65213	0,04365	—0,12442
80	0,48373	0,04873	—0,10851

Tableau XVIII.

x	n	Formule (19)	Formule (21)		
			valeur	déviation	erreur relative en %
20	10	8,260	8,260	0,000	0,00
	20	13,754	13,754	0,000	0,00
	30	17,283	17,282	—0,001	—0,01
	40	19,386	19,385	—0,001	—0,01
	50	20,458	20,458	0,000	0,00
	60	20,853	20,867	0,014	0,07
30	10	8,180	8,180	0,000	0,00
	20	13,434	13,434	0,000	0,00
	30	16,566	16,565	—0,001	—0,01
	40	18,163	18,159	—0,004	—0,02
	50	18,750	18,754	0,004	0,02
40	10	8,013	8,013	0,000	0,00
	20	12,791	12,789	—0,002	—0,02
	30	15,225	15,216	—0,009	—0,06
	40	16,121	16,101	—0,020	—0,12
50	10	7,672	7,671	—0,001	—0,01
	20	11,582	11,571	—0,011	—0,09
	30	13,020	12,968	—0,052	—0,40
60	10	7,012	7,007	—0,005	—0,07
	20	9,592	9,523	—0,069	—0,72
70	10	5,863	5,831	—0,032	—0,55

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \frac{1}{\log c}\left[\bar{a}_0(n) - \overline{m}(n)\,\Delta\bar{a}_0(n)\frac{\lambda(x)}{\overline{m}(n)+\lambda(x)}\right] \qquad (21)$$

avec

$$\overline{m}(n) = \frac{2\Delta\bar{a}_0(n)}{\Delta^2\bar{a}_0(n)}.$$

Le tableau XVIII contient les valeurs de l'annuité continue $\bar{a}_{x\overline{n}|}$ calculées par cette formule approchée.

Il résulte de ce tableau que la formule (21) permet de calculer l'annuité viagère temporaire continue avec une très bonne approximation: l'erreur relative rest inférieure à 0,8% pour tout l'âge-terme $s = x + n$ qui ne dépasse pas 80 ans; elle est même inférieure à 0,1%, si $s \leq 70$.

Pour montrer que la série (20) peut être bien utilisée pour le calcul de l'annuité $\bar{a}_{x\overline{n}|}$, nous donnons, dans le tableau XIX, les valeurs de cette annuité calculées avec trois et quatre termes de la série (20).

Il suit de ce tableau que la série (20) avec ses 4 termes donne déjà la même valeur de l'annuité $\bar{a}_{x\overline{n}|}$ que la formule (19), si l'âge-terme s ne dépasse pas 70 ans.

Tableau XIX.

x	n	Formule (19)	Série (20) avec le nombre de termes: 3		4	
			valeur	déviation	valeur	déviation
20	10	8,260	8,260	0,000	8,260	0,000
	20	13,754	13,754	0,000	13,754	0,000
	30	17,283	17,282	—0,001	17,282	—0,001
	40	19,386	19,386	0,000	19,386	0,000
	50	20,458	20,459	0,001	20,458	0,000
	60	20,853	20,862	0,009	20,855	0,002
30	10	8,180	8,180	0,000	8,180	0,000
	20	13,434	13,434	0,000	13,434	0,000
	30	16,566	16,566	0,000	16,566	0,000
	40	18,163	18,163	0,000	18,163	0,000
	50	18,750	18,760	0,010	18,753	0,003
40	10	8,013	8,013	0,000	8,013	0,000
	20	12,791	12,791	0,000	12,791	0,000
	30	15,225	15,225	0,000	15,225	0,000
	40	16,121	16,128	0,007	16,124	0,003
50	10	7,672	7,672	0,000	7,672	0,000
	20	11,582	11,581	—0,001	11,582	0,000
	30	13,020	13,019	—0,001	13,023	0,003
60	10	7,012	7,011	—0,001	7,011	—0,001
	20	9,592	9,583	—0,009	9,592	0,000
70	10	5,863	5,858	—0,005	5,863	0,000