Nikolaj Podtjagin

Quelques remarques sur la méthode de Lidston dans l'assurance sur la vie. I

Aktuárské vědy, Vol. 7 (1938), No. 3, 114–122

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144696

Quelques remarques sur la méthode de Lidston dans l'assurance sur la vie.[1])

N. Podtiaguine, Praha.

Lidston a construit sa méthode de groupement pour le calcul des réserves mathématiques dans l'assurance sur la vie, en supposant que dans le cas, où la table de mortalité est ajustée par la formule de Makeham, l'annuité viagère temporaire discontinue (aussi bien que différentes fonctions intervenant dans le calcul de la valeur actuelle des engagements de l'assureur) peut se développer en série convergente de la forme

$$a_{x\overline{n}|} = A_0(n) + A_1(n)\, c^x + A_2(n)\, c^{2x} + \ldots + A_p(n)\, c^{px} + \ldots, \qquad (1)$$

les coefficients $A_0(n), A_1(n), \ldots, A_p(n), \ldots$ ne dépendant que de la durée n, x étant l'âge de l'assuré et c la constante de Makeham. Lidston a admis, en outre, que la convergence de la série (1) est tellement rapide qu'on peut négliger dans cette série tous les termes à l'exception de deux premiers, sans commettre une erreur notable. Lidston pose donc

$$a_{x\overline{n}|} = A_0(n) + A_1(n)\, c^x. \qquad (2)$$

Nous appelerons avec M. E. Dasen[2]) ce développement limité, un développement lidstonien.

Dans le petit travail présent je veux montrer jusqu'au quel dégré l'hypothèse de Lidston est légitime. Nous allons donner pour cela quelques expressions analytiques de l'annuité viagère qui nous permettront de faire une idée d'approximation comportant par la formule (2). Elles nous permettront, d'autre part, de donner un procédé nouveau pour la détermination de l'âge auxiliaire dans l'évaluation de la valeur actuelle totale d'un groupe d'annuités viagères discontinues.

En supposant que la table de mortalité est ajustée par la loi de Makeham, nous aurons pour la probabilité ${}_tp_x$ pour qu'une tête d'âge x survive au bout du temps t l'expression

$${}_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}$$

ou

$${}_tp_x = e^{-\alpha t} e^{\lambda(x)(1-c^t)},$$

si nous posons

$$\alpha = -\log s, \quad \lambda(x) = -c^x \log g.$$

Pour l'annuité viagère temporaire discontinue de durée n on aura donc

---

[1]) Ce travail, un résultat des recherches scientifiques au séminaire de M. prof. Dr. Schoenbaum, a été admis comme la thèse de doctorat à l'Université de Charles à Prague.

[2]) Extension des méthodes de Lidston, Altenburger et Fouret au calcul par groupes des réserves mathématiques dans l'assurance vie, invalidité et survivants. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1936, p. 37.

$$a_{x\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} e^{-\delta t}\, {}_tp_x = e^{\lambda(x)} \sum_{t=0}^{n-1} e^{-(\alpha+\delta)t}\, e^{-c^t \lambda(x)},$$

δ étant un taux instantané d'intérêt.

En posant

$$k = \frac{\alpha + \delta}{\log c}$$

nous pouvons encore écrire

$$a_{x\overline{n|}} = e^{\lambda(x)} \sum_{t=0}^{n-1} c^{-kt}\, e^{-c^t \lambda(x)}. \tag{3}$$

Or

$$e^{-c^t\lambda(x)} = 1 - \lambda c^t + \frac{\lambda^2}{2!} c^{2t} - \frac{\lambda^3}{3!} c^{3t} + \ldots,$$

où nous avons posé, pour simplifier l'écriture,

$$\lambda(x) = \lambda.$$

L'égalité (3) prend donc la forme

$$a_{x\overline{n|}} = e^{\lambda} \left[\sum_{t=0}^{n-1} c^{-kt} - \lambda \sum_{t=0}^{n-1} c^{(1-k)t} + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{t=0}^{n-1} c^{(2-k)t} - \frac{\lambda^3}{3!} \sum_{t=0}^{n-1} c^{(3-k)t} + \ldots \right].$$

En posant maintenant

$$a_j(n) = \sum_{t=0}^{n-1} c^{(j-k)t} = \frac{c^{(j-k)n} - 1}{c^{j-k} - 1} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

nous aurons finalement

$$a_{x\overline{n|}} = e^{\lambda} \left[a_0(n) - \lambda\, a_1(n) + \frac{\lambda^2}{2!} a_2(n) - \frac{\lambda^3}{3!} a_3(n) + \ldots \right]. \tag{4}$$

Quand j tend vers l'infini, le rapport

$$\frac{a_{j+1}(n)}{a_j(n)}$$

tend évidemment vers une limite déterminée c^{n-1}. La valeur absolue du rapport du terme général de la série qui se trouve dans les crochets de l'équation (4) au terme précédent tend donc vers zéro quand j croît à l'infini. Cette série est, par conséquent, absolument convergente pour toutes les valeurs de x et de n.

En posant dans l'égalité (4)

$$n = \omega - x + 1,$$

on a pour la valeur de l'annuité viagère illimitée l'expression

$$a_x = e^{\lambda} \left[a_0(\omega - x + 1) - \lambda a_1(\omega - x + 1) + \frac{\lambda^2}{2!} a_2(\omega - x + 1) \ldots \right],$$

ω étant l'âge extrême de la table.

En substituant dans la formule (4) au lien de e^{λ} son développement taylorien, on obtient la formule

$$a_{x\overline{n|}} = a_0(n) - \lambda[a_1(n) - a_0(n)] + \frac{\lambda^2}{2!}[a_2(n) - 2a_1(n) + a_0(n)] -$$

$$-\frac{\lambda^3}{3!}[a_3(n) - 3a_2(n) + 3a_1(n) - a_0(n)] + \ldots$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$a_{x\overline{n|}} = a_0(n) - \lambda\, \Delta a_0(n) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta^2 a_0(n) - \frac{\lambda^3}{3!}\Delta^3 a_0(n) + \ldots \tag{5}$$

La série du second terme étant le produit de deux séries absolument convergentes est, d'après le théorème de Cauchy, aussi convergente. Or, la fonction $\lambda(x)$ est égale à $-c^x \log g$. Nous voyons ainsi que l'annuité viagère $a_{x\overline{n|}}$ peut bien être développée en série convergente de la forme (1). Outre les raisonnements théoretiques, nous aurons recours dans la suite au calcul numérique. Nous nous servirons pour cela toujours de la table MM $3^1/_2\%$ établie par le Bureau Fédéral des Assurances, table fournissant les bases techniques minima pour l'assurance de groupes en Suisse (Bern, 1931). On a pour cette table

$$c = 1{,}0792, \quad \log c = 0{,}07622003^{2)}$$
$$g = 0{,}9960, \quad \log g = \overline{1}{,}99599198$$
$$s = 0{,}9967, \quad \log s = \overline{1}{,}99669455$$
$$\delta = 0{,}0344014.$$

La fonction $\lambda(x)$ étant définie par la relation

$$\lambda(x) = -c^x \log g, \tag{6}$$

nous aurons $\lambda(x) > 1$ pour tous les âges x, vérifiant l'inégalité

$$x > \frac{-\log(-\log g)}{\log c}.$$

Pour la table MM choisie par nous on a

$$\frac{-\log(-\log g)}{\log c} = 72{,}41.$$

Nous aurons donc, dans ce cas, $\lambda(x) > 1$ pour tous les âges entiers supérieurs à 72. Pour $x = 73$ on aura déjà

$$\lambda(73) = 1{,}04561.$$

---

[2]) Le symbole log signifiera toujours dans la suite le logarithme népérien.

Le tableau I donne les valeurs numériques de la fonction $\lambda(x)$ pour la table MM.

Tableau I.

x	$\lambda(x)$
20	0,01841
30	0,03944
40	0,08453
50	0,18115
60	0,38819
70	0,83189
80	1,78273
90	3,82036
100	8,18698

Nous voyons ainsi que les valeurs de $\lambda(x)$ assez petites au commencement croissent rapidement et pour les grands âges sont sensiblement supérieures à l'unité.

Considérons maintenant les fonctions

$$a_j(n) = \frac{c^{(j-k)n} - 1}{c^{j-k} - 1} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

On voit, tout d'abord, que ces fonctions croissent constamment avec n et j.

Suivant les calculs efféctués par Blaschke[3]) on a toujours, pour les taux d'intérêt variant de 0 à 0,05,

$$0 < k < 1.$$

Nous avons, par exemple, dans notre cas,

$$k = 0{,}49471.$$

Nous pouvons donc écrire

$$a_j(n) > \frac{c^{(j-k)} - 1}{c^{j-k}} > c^{(j-k)(n-1)} - 1. \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

La constante c étant comprise entre 1,066 et 1,112, suivant les recherches de Blaschke, nous voyons ainsi que les fonctions $a_j(n)$ prennent des valeurs considérables pour les grands valeurs de n et j.

Nous donnons dans le tableau II les valeurs de ces fonctions pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$ et $n = 10, 20, 30, \ldots, 80$.

[3]) Über eine Anwendung des Sterbegesetzes von Gompertz Makeham. Mitteilungen des Verbandes der österreichischen und ungarischen Versicherungstechniker, 1902.

Tableau II.

n	$a_0(n)$	$a_1(n)$	$\frac{1}{2!}\,a_2(n)$
10	8,48893	11,96524	8,84142
20	14,31121	29,55184	36,68996
30	18,30454	55,40077	124,40666
40	21,04344	93,39377	400,69478
50	22,92197	149,23616	1 270,94137
60	24,21039	231,31373	4 012,02517
70	25,09409	351,95200	12 645,8307
80	25,70018	529,26710	39 840,4065

n	$\frac{1}{3!}\,a_3(n)$	$\frac{1}{4!}\,a_4(n)$
10	4,55470	1,83187
20	35,29863	28,32994
30	242,81800	411,62477
40	1 643,55972	5 955,98833
50	11 098,4716	86 155,2592
60	74 918,4802	1 246 238,81
70	505 699,164	18 026 854,7
80	3 413 438,57	260 758 712

Tableau III.

n	$a_0(n)$	$\Delta a_0(n)$	$\frac{1}{2!}\,\Delta^2 a_0(n)$
10	8,48893	3,47632	1,12064
20	14,31121	15,24063	14,29372
30	18,30454	37,09623	78,15816
40	21,04344	72,35033	317,82273
50	22,92197	126,31419	1 133,16619
60	24,21039	207,10334	3 792,81663
70	25,09409	326,85791	12 306,4257
80	25,70018	503,56692	39 323,9895

n	$\frac{1}{3!}\,\Delta^3 a_0(n)$	$\frac{1}{4!}\,\Delta^4 a_0(n)$
10	0,28108	0,05738
20	10,99939	7,04728
30	143,06096	222,53933
40	1 286,05458	4 498,08719
50	9 898,32799	75 668,3407
60	71 018,0768	1 173 288,79
70	493 225,127	17 527 420,9
80	3 373 858,52	257 365 107

On voit de ce tableau que les fonctions $a_j(n)$ croissent très rapidement avec l'indice j et la durée n. Les différences $\Delta a_0(n)$, $\Delta^2 a_0(n)$, $\Delta^3 a_0(n)$, ... doivent donc prendre aussi des valeurs considérables. Le tableau III le confirme complètement.

Il résulte de tout ce que nous avous dit jusqu'ici que la série (5) ne converge rapidement que pour les âges x qui ne sont pas trop élevés et pour les courtes durées n. Pour les âges plus élevés et pour les durées plus longues elle converge, au contraire, très lentement.

Pour nous faire un image plus clair de la rapidité de la convergence de la série (5) nous donnons, comme un exemple, par le tableau IV les valeurs du cinquième terme de cette série.

En comparant les valeurs de l'annuité viagère calculées par son développement lidstonien

$$a_{x\overline{n}|} = a_0(n) - \lambda(x)\, \Delta a_0(n) \tag{7}$$

avec ses valeurs établies par le Bureau Fédéral des Assurances, nous obtenons le tableau V.

De l'examen de ce tableau, on peut conclure que, si nous considérons l'erreur relative de 3% comme admissible, l'emploi de la formule (7) est légitime dans tous les cas où l'âge-terme $s = x + n$ ne dépasse pas 70 ans. Mais dans le cas où l'âge-terme s dépasse sensiblement cette valeur, l'érreur devient trop grande et le développement lidstonien (7) n'est plus applicable; c'est bien ce que nous avons prévu.

Tableau IV.

Valeurs du cinquième terme de la série (5).

x \ n	10	20	30	40
20	0,00000	0,00000	0,00002	0,00045
30	0,00000	0,00002	0,00053	0,01080
40	0,00000	0,00036	0,01137	0,22985
50	0,00006	0,00759	0,23961	4,84309
60	0,00130	0,16003	5,05349	102,14391
70	0,02748	3,37508	106,57847	
80	0,57958	71,18063		
90	12,22342			

x \ n	50	60	70	80
20	0,00757	0,11733	1,75274	25,73651
30	0,18160	2,81589	42,06581	
40	3,86665	59,95506		
50	81,47210			

Tableau V.

x	n	$a_{x\overline{n}\vert}$	Développement lidstonien		
			valeur	erreur absolue	erreur relative en %
20	10	8,425	8,425	0,000	0,00
	20	14,036	14,031	—0,005	— 0,04
	30	17,648	17,622	—0,026	— 0,15
	40	19,812	19,712	—0,100	— 0,50
	50	20,927	20,597	—0,330	— 1,58
	60	21,347	20,398	—0,949	— 4,45
30	10	8,354	8,352	—0,002	— 0,02
	20	13,732	13,710	—0,022	— 0,16
	30	16,955	16,841	—0,114	— 0,67
	40	18,615	18,190	—0,425	— 2,28
	50	19,240	17,940	—1,300	— 6,76
40	10	8,203	8,195	—0,008	— 0,10
	20	13,119	13,023	—0,096	— 0,73
	30	15,651	15,169	—0,482	— 3,08
	40	16,604	14,928	—1,676	—10,09
50	10	7,894	7,859	—0,035	— 0,44
	20	11,961	11,550	—0,411	— 3,44
	30	13,491	11,585	—1,906	—14,13
60	10	7,293	7,139	—0,154	— 2,11
	20	10,037	8,395	—1,642	—16,36
70	10	6,235	5,597	—0,638	—10,23

Le tableau VI contient les valeurs de l'annuité viagère temporaire discontinue calculées par la série (5), en y conservant 3, 4, et 5 termes.

On voit de ce tableau que la série (5), avec ses 5 termes donne déjà les valeurs précises, si l'âge-terme $s = x + n$ ne dépasse pas 70 ans.

On peut faire la convergence de la série (5) plus rapide, en lui appliquant la transformation connue de Lindelöf

$$z = z(x, n) = \frac{\lambda(x)}{m(n) + \lambda(x)}$$

ou

$$\lambda(x) = (z + z^2 + z^3 + \ldots)\, m(n),$$

$m(n)$ étant une fonction de la durée n que nous définirons un peu plus tard.

La série (5) prend alors la forme

$$a_{x\overline{n}\vert} = a_0 - zm\Delta a_0 + \frac{z^2}{2!}\, m(m\Delta^2 a_0 - 2\Delta a_0) - \frac{z^3}{3!}\, m(m^2\Delta a_0 -$$

$$- 6m\Delta^2 a_0 + 6\Delta a_0) + \frac{z^4}{4!}\, m(m^3\Delta^4 a_0 - 12m^2\Delta^3 a_0 + 36m\Delta^2 a_0 - 24\Delta a_0)\ldots, \tag{8}$$

Tableau VI.

x	n	$a_{\overline{xn}\|}$	Série (5) avec le nombre de termes:					
			3		4		5	
			valeur	déviation	valeur	déviation	valeur	déviation
20	10	8,425	8,425	0,000	8,425	0,000	8,425	0,000
	20	14,036	14,036	0,000	14,035	—0,001	14,035	—0,001
	30	17,648	17,648	0,000	17,647	—0,001	17,647	—0,001
	40	19,812	19,819	0,007	19,811	—0,001	19,812	0,000
	50	20,927	20,981	0,054	20,920	—0,007	20,927	0,000
	60	21,347	21,683	0,336	21,243	—0,104	21,360	0,013
30	10	8,354	8,354	0,000	8,354	0,000	8,354	0,000
	20	13,732	13,732	0,000	13,732	0,000	13,732	0,000
	30	16,955	16,963	0,008	16,954	—0,001	16,955	0,000
	40	18,615	18,684	0,069	18,605	—0,010	18,616	0,001
	50	19,240	19,703	0,463	19,095	—0,145	19,276	0,036
40	10	8,203	8,203	0,000	8,203	0,000	8,203	0,000
	20	13,119	13,125	0,006	13,118	—0,001	13,119	0,000
	30	15,651	15,727	0,076	15,641	—0,010	15,652	0,001
	40	16,604	17,199	0,595	16,422	—0,182	16,652	0,048
50	10	7,894	7,896	0,002	7,894	0,000	7,894	0,000
	20	11,961	12,019	0,058	11,954	—0,007	11,962	0,001
	30	13,491	14,149	0,658	13,299	—0,192	13,539	0,048
60	10	7,293	7,308	0,015	7,292	—0,001	7,293	0,000
	20	10,037	10,549	0,512	9,905	—0,132	10,065	0,028
70	10	6,235	6,373	0,138	6,211	—0,024	6,238	0,003

is nous posons, pour simplifier l'écriture,

$$m(n) = m, \quad a_j(n) = a_j.$$

Nous définirons maintenant la fonction $m(n)$ de telle manière que le troisième terme de cette série soit égal à zéro. Nous poserons donc

$$m\Delta^2 a_0 - 2\Delta a_0 = 0,$$

d'où

$$m(n) = \frac{2\,\Delta a_0(n)}{\Delta^2 a_0(n)}. \tag{9}$$

La série (8) prend maintenant la forme

$$a_{\overline{xn}|} = a_0 - zm\Delta a_0 - \frac{z^3}{3!}\,m(m^2\Delta^3 a_0 - 6\Delta a_0) + \frac{z^4}{4!}\,m(m^3\Delta^4 a_0 -$$
$$- 12m^2\Delta^3 a_0 + 48\Delta a_0)\;\ldots$$

ou

$$a_{\overline{xn}|} = a_0(n) - z\,b_1(n) - \frac{z^3}{3!}\,b_3(n) + \frac{z^4}{4!}\,b_4(n)\;\ldots, \tag{10}$$

en posant

$$\begin{aligned} b_1(n) &= m\Delta a_0 \\ b_3(n) &= m(m^2\Delta^3 a_0 - 6\Delta a_0) \\ b_4(n) &= m(m^3\Delta^4 a_0 - 12m^2\Delta^3 a_0 + 48\Delta a_0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$m(n)$ étant toujours la fonction définie par la relation (9).

Les coefficients $b_j(n)$ ainsi définis ont les valeurs beaucoup plus petites que les valeurs des coefficients Δa_0, $\Delta^2 a_0$, $\Delta^3 a_0, \ldots$ de la série (5), comme nous montre le tableau VII.

Tableau VII.

n	$b_1(n)$	$\frac{1}{3!}\, b_3(n)$	$\frac{1}{4!}\, b_4(n)$
10	10,78378	—2,39340	1,70994
20	16,25027	—2,91685	1,60890
30	17,60700	—2,31066	0,61847
40	16,47010	—1,29867	—0,49453
50	14,08026	—0,37027	—1,28662
60	11,30869	0,25362	—1,63903
70	8,68131	0,55980	—1,63857
80	6,44848	0,63631	—1,43671

En ne conservant dans la série (10) que ses deux premiers termes, nous aurons la formule approchée

$$a_{x\overline{n}|} = a_0(n) - m(n)\,\Delta a_0(n)\,\frac{\lambda(x)}{m(n) + \lambda(x)} \tag{11}$$

avec

$$m(n) = \frac{2\Delta a_0(n)}{\Delta^2 a_0(n)}.$$

(A suivre.)

ZPRÁVY.

Pro studium pojistné matematiky a matematické statistiky na universitě Karlově v Praze vydalo dne 11. května ministerstvo školství a národní osvěty tento Zkušební řád pro závěrečné státní zkoušky z pojistné matematiky a matematické statistiky:

§ 1. Ustanovení základní. Odborná způsobilost, prováděti práce pojistně matematické a matematicko-statistické, prokazuje se závěrečnou státní zkouškou vykonanou u zkušební komise pro pojistnou matematiku a matematickou statistiku.

§ 2. Zkušební komise. 1. Pro závěrečné státní zkoušky z pojistné matematiky a matematické statistiky ustanoví ministr školství a národní osvěty v Praze komisi, která má název „Zkušební komise pro pojistnou matematiku a matematickou statistiku u přírodovědecké fakulty university Karlovy v Praze“. Tato komise podléhá přímo ministerstvu školství a národní osvěty. 2. Členy zkušební komise jmenuje ministr školství a národní