Hans Koeppler

Die Formel des Herrn Prof. Loewy zur Darstellung von Integralgleichungen als Lösungsformel für Integralgleichungen der Lebensversicherung

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 4, 171–181

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144673

intégrable dans la sphère Ω limitée par une simple courbe fermée. Cette sphère soit entièrement contenue dans le rectangle limité par les droites $s = s_0$, $s = s_\omega$, $t = t_0$, $t = t_\omega$. Supposons en outre que les fonctions $x(s)$ et $y(s)$ sont intégrables dans l'intervalle $\langle s_0, s_\omega \rangle$ et les fonctions $z(t)$ et $u(t)$ intégrables dans l'intervalle $\langle t_0, t_\omega \rangle$. Si, dans la section considérée, nous avons en vigueur

$$\begin{vmatrix} x(s_1), x(s_2) \\ y(s_1), y(s_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z(t_1), z(t_2) \\ u(t_1), u(t_2) \end{vmatrix} \geqq 0, \quad \begin{vmatrix} a(s_1, t_1), a(s_1, t_2) \\ a(s_2, t_1), a(s_2, t_2) \end{vmatrix} \geqq 0$$

pour des $s_1 < s_2$, $t_1 < t_2$ quelconques, alors nous obtenons facilement de (4) l'inégalité integrale

$$\frac{\iint\limits_\Omega a(s, t)\, x(s)\, z(t)\, ds\, dt}{\iint\limits_\Omega a(s, t)\, x(s)\, u(t)\, ds\, dt} \geqq \frac{\iint\limits_\Omega a(s, t)\, y(s)\, z(t)\, ds\, dt}{\iint\limits_\Omega a(s, t)\, y(s)\, u(t)\, ds\, dt}.$$

Il est bien facile de répondre à la deuxième condition énumérée dans (3'), alors par exemple pour la fonction $a(s, t) = \varphi(s)^{\psi(t)}$ où $\varphi(s)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions ne diminuant point. Car de la rélation

$$\left[\frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s_2)}\right]^{\psi(t_1)} \geqq \left[\frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s_2)}\right]^{\psi(t_2)} \begin{pmatrix} s_1 < s_2 \\ t_1 < t_2 \end{pmatrix}$$

il y a que

$$\begin{vmatrix} \varphi(s_1)^{\psi(t_1)}; & \varphi(s_1)^{\psi(t_2)} \\ \varphi(s_2)^{\psi(t_1)}, & \varphi(s_2)^{\psi(t_2)} \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Die Formel des Herrn Prof. Loewy zur Darstellung von Integralgleichungen als Lösungsformel für Integralgleichungen der Lebensversicherung.

Von *Hans Koeppler,* Berlin.

Aus der Tatsache, daß die Lösung einer Integralgleichung selbst wieder eine Integralgleichung ist [1]) kann man wohl schon schließen, daß irgendeine Beziehung, welche zur Darstellung einfacher Integralgleichungen dient, weiterhin auch umgekehrt zur Lösung einfacher Integralgleichungen verwendet werden kann. Nach dieser Richtung hin hat der Verfasser die einst von Prof. Loewy [2]) aufgestellte und angewendete Formel untersucht. Die letztere möge zunächst zur Bequemlichkeit der Leser in Kürze mittels einfacher Integration und in einfachster Form hergeleitet werden.

Geht man von dem Funktionen-Quotienten

$$z(t) = \frac{\varphi(t)}{s(t)}$$

aus und differentiiert denselben, so ist bekanntlich

$$z'(t) = \frac{\varphi'(t)\, s(t) - s'(t)\, \varphi(t)}{[s(t)]^2} = \frac{\varphi'(t)}{s(t)} - \frac{s'(t)}{s(t)}\, z(t)$$

oder

$$\mathrm{d}z(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{s(t)} - \frac{\mathrm{d}s(t)}{s(t)}\, z(t). \tag{A}$$

Integriert man num diese Differentialbeziehung zwischen 0 und x mit der Annahme des Vorhandenseins eines Wertes $z(0)$, so erhält man die in den Darstellungen des Herrn Prof. Loewy enthaltene retrospektive Formel

$$z(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{s(t)} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}s(t)}{s(t)}\, z(t) + z(0), \tag{I}$$

nach welcher Prof. Loewy aus der einfachen retrospektiven Formel der Prämienreserve 3 Integralgleichungen der Prämienreserve hergeleitet hat. Integrieren wir die Differentialbeziehung (A) nach t zwischen x und n mit der Annahme des Vorhandenseins eines Wertes $z(n)$, so ergibt sich die prospektive Beziehung

$$z(x) = z(n) - \int_x^n \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{s(t)} + \int_x^n \frac{\mathrm{d}s(t)}{s(t)}\, z(t), \tag{II}$$

die in den Darstellungen des Prof. Loewy nicht enthalten ist. Es sei noch bemerkt, daß die Formeln (I) und (II), die der Verfasser schon in seinem Aufsatz „Die Anwendung der Integralgleichungen von Volterra in der Lebensversicherung", [3]) inbezug auf Lösungen von Integralgleichungen untersucht hat, sich auf einfachstem Wege ohne Anwendung besonderer Kunstgriffe zur Herstellung von Lösungen verwenden lassen. Der Inhalt dieses kleinen Aufsatzes soll natürlich nicht die Wiedergabe des gemeinten Abschnitts des soeben zitierten Aufsatzes zum Gegenstand haben. Dieses Mal werde auf andere, sehr einfache Weise gezeigt, wie man mittels der Formeln (I) und (II) die einfachen Integralgleichungen der Lebensversicherung lösen kann.

Auf meine erwähnte Arbeit zurückkommend, bemerke ich, daß man die retrospektiven Integralgleichungen der Lebensversicherung wohl alle in der vereinfachten Volterra'schen Form

$$\varphi(x) = f(x) \mp \int_0^x \frac{\lambda(\xi)}{\lambda(x)}\, \mu(\xi)\, \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

darstellen kann. Setzt man

$$\lambda(x)\,\varphi(x) = \psi(x) \text{ und } \lambda(x)\,f(x) = g(x),$$

so erhält man die in der Lebensversicherung beliebt gewordene Form

$$\psi(x) = g(x) \mp \int_0^x \mu(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi. \tag{B}$$

Zum Vergleich mit dieser Formel schreiben wir unsere Formel (I), indem wir $z(t) = \psi(t)$ und $z(0) = \psi(0) = 0$ setzen,

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{d\varphi(\xi)}{s(\xi)} - \int_0^x \frac{ds(\xi)}{s(\xi)}\,\psi(\xi). \tag{C}$$

Sollen nun beide Formeln miteinander übereinstimmen, so muß zunächst

$$g(x) = \int_0^x \frac{d\varphi(\xi)}{s(\xi)}$$

sein, woraus durch Differentiation nach x

$$g'(x) = \frac{\varphi'(x)}{s(x)}$$

folgt. Aus dieser Gleichung ergibt sich aber

$$d\varphi(x) = s(x)\,dg(x).$$

Wenn man diese neue Gleichung zwischen 0 und x integriert und annimmt, daß $\varphi(0) = 0$, so erhält man

$$\varphi(x) = \int_0^x s(\xi)\,dg(\xi).$$

Der weitere Vergleich der Gleichungen (B) und (C) führt zu der Gleichung

$$\frac{s'(\xi)}{s(\xi)} = \pm\,\mu(\xi),$$

aus welcher man

$$d \ln s(\xi) = \pm\,\mu(\xi)\,d\xi$$

findet. Die Integration dieser Gleichung zwischen 0 und x liefert

$$\ln s(x) - \ln s(0) = \pm \int_0^x \mu(\xi)\,d\xi,$$

$$\frac{s(x)}{s(0)} = e^{\pm\int\limits_0^x \mu(\xi)d\xi} \qquad \text{oder} \qquad s(x) = s(0)\, e^{\pm\int\limits_0^x \mu(\xi)d\xi}.$$

Nach Voraussetzung war $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{s(x)}$.

Setzt man nun für $\varphi(x)$ und $s(x)$ die Werte ein, so erhält man die einfache Lösungsformel

$$\psi(x) = \frac{\int\limits_0^x s(\xi)\, dg(\xi)}{s(0)\, e^{\pm\int\limits_0^x \mu(\xi)d\xi}} = \frac{\int\limits_0^x s(0)\, e^{\pm\int\limits_0^\xi \mu(\xi)d\xi}\, dg(\xi)}{s(0)\, e^{\pm\int\limits_0^x \mu(\xi)d\xi}}$$

$$= \int\limits_0^x e^{\mp\int\limits_\xi^x \mu(\xi)d\xi}\, dg(\xi), \tag{III}$$

welche jenen nahe verwandt ist, die Prof. Cantelli[4]) und Prof. Messina[5]) gegeben haben.

Die prospektiven Integralgleichungen der Lebensversicherung lassen sich in den einfachen Formen[3])

$$\varphi(x) = f(x) \pm \int\limits_x^k \frac{\lambda(\xi)}{\lambda(x)} \mu(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

darstellen. Auch in diesen setzen wir

$$\lambda(x)\, \varphi(x) = \psi(x), \text{ sowie } \lambda(x)\, f(x) = g(x),$$

wodurch die prospektiven Integralgleichungen umgeformt werden in

$$\psi(x) = g(x) \pm \int\limits_x^k \mu(\xi)\, \psi(\xi)\, d\xi. \tag{D}$$

Um die Formel (II) zum Vergleich heranziehen zu können, setzen wir in dieser

$$z(x) = \psi(x) \text{ und } n = k,$$

so bekommen wir

$$\psi(x) = \psi(k) - \int\limits_x^k \frac{d\varphi(\xi)}{s(\xi)} + \int\limits_x^k \frac{ds(\xi)}{s(\xi)}\, \psi(\xi). \tag{E}$$

Damit Übereinstimmung zwischen (D) und (E) erzielt wird, muß zunächst

$$g(x) = \psi(k) - \int_x^k \frac{d\varphi(\xi)}{s(\xi)}$$

gesetzt werden. Die Differentiation nach x führt wieder zu der Beziehung

$$g'(x) = \frac{\varphi'(x)}{s(x)}, \quad dg(x) = \frac{d\varphi(x)}{s(x)}$$

oder

$$d\varphi(x) = s(x)\, dg(x).$$

Wird diese Differentialbeziehung nach x zwischen x und k integriert, so folgt

$$\varphi(k) - \varphi(x) = \int_x^k s(\xi)\, dg(\xi)$$

oder

$$\varphi(x) = \varphi(k) - \int_x^k s(\xi)\, dg(\xi).$$

Des Weiteren setzen wir

$$\frac{ds(\xi)}{s(\xi)} = d \ln s(\xi) = \pm \mu(\xi)$$

und integrieren wieder zwischen 0 und x, sodaß wir erhalten

$$\ln s(\xi) - \ln s(0) = \ln \frac{s(\xi)}{s(0)} = \pm \int_0^x \mu(\xi)\, d\xi \quad \text{oder} \quad s(x) = s(0)\, e^{\pm \int_0^x \mu(\xi) d\xi}.$$

Indem wir die für $\varphi(x)$ und $s(x)$ gefundenen Werte in den Quotienten $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{s(x)}$ einsetzen, gelangen wir zu der Lösung

$$\psi(x) = \frac{\varphi(k) - \int_x^k s(\xi) dg(\xi)}{s(0)\, e^{\pm \int_0^x \mu(\xi) d\xi}} = \frac{\varphi(k) - \int_x^k s(0)\, e^{\pm \int_0^\xi \mu(\xi) d\xi}\, dg(\xi)}{s(0)\, e^{\pm \int_0^x \mu(\xi) d\xi}},$$

welche wir dadurch vereinfachen, daß wir

$$\varphi(k) = \psi(k)\, s(k) = \psi(k)\, s(0)\, e^{\pm \int_0^k \mu(\xi) d\xi}$$

setzen. Wir gelangen so zu der endgültigen Lösung

$$\psi(x) = \psi(k)\, e^{\pm \int\limits_x^k \mu(\xi) d\xi} - \int\limits_x^k e^{\pm \int\limits_x^\xi \mu(\xi) d\xi} dg(\xi), \tag{IV}$$

in der allerdings $\psi(k)$ als bekannt vorauszusetzen ist, was stets zutrifft, wenn nicht der Fall $\psi(k) = 0$ vorliegt.

Um die Brauchbarkeit der Lösungen (III) und (IV) vor Augen zu führen, betrachten wir die retrospektive und die prospektive Integralgleichung der Risikoprämie und die mit diesen Integralgleichungen zusammenhängenden Integralgleichungen des riskierten Kapitals.

Die retrospektiven Integralgleichungen ergeben sich, wenn man in der Formel der Differentialrisikoprämie für das Zeitdifferential k bis $k + dk$

$$_k\overline{\Pi}_x\, dk = \mu_{x+k}(S_k - {}_k\overline{V}_x)\, dk$$

die k-te Prämienreserve als die Differenz zwischen der Summe der aufgezinsten Prämien der Versicherung und der Summe der aufgezinsten Risikoprämien darstellt. Man erhält auf diese Weise mit Fortlassung des Differentials dk

$$\begin{aligned} {}_k\overline{\Pi}_x &= \mu_{x+k} \left[S_k - \overline{P}_{x\overline{n}|} \int\limits_0^k r^{k-\lambda}\, d\lambda + \int\limits_0^k r^{k-\lambda}\, {}_\lambda\overline{\Pi}_x\, d\lambda \right] \\ &= \mu_{x+k} \left(S_k - \overline{P}_{x\overline{n}|} \int\limits_0^k r^{k-\lambda}\, d\lambda \right) + \mu_{x+k} \int\limits_0^k r^{k-\lambda}\, {}_\lambda\overline{\Pi}_x\, d\lambda \end{aligned} \tag{Va}$$

oder nur für die Risikosumme

$$(S_k - {}_k\overline{V}_x) = \left(S_k - \overline{P}_{x\overline{n}|} \int\limits_0^k r^{k-\lambda}\, d\lambda \right) + \int\limits_0^k r^{k-\lambda} \mu_{x+\lambda} (S_\lambda - {}_\lambda\overline{V}_x)\, d\lambda. \tag{Vb}$$

Der Einfachheit halber beschäftigen wir uns nur mit der Formel (Vb) und schreiben sie in der Form

$$v^k(S_k - {}_k\overline{V}_x) = \left(v^k S_k - \overline{P}_{x\overline{n}|} \int\limits_0^k v^\lambda\, d\lambda \right) + \int\limits_0^k \mu_{x+\lambda} [v^\lambda (S_\lambda - {}_\lambda V_x)]\, d\lambda.$$

Indem wir diese Gleichung mit den Gleichungen (B) vergleichen, bemerken wir, daß wir

$$g(k) = v^k S_k - \overline{P}_{x\overline{n}|} \int\limits_0^k v^\lambda d\lambda, \quad \mu_\xi = \mu_{x+\xi}, \quad \psi(\xi) = v^\xi\, (S_\xi - {}_\xi\overline{V}_x)$$

zu setzen haben. Zwecks Anwendung der Lösung (III) schreiben wir

$$dg(\xi) = d \left(v^\xi S_\xi - \overline{P}_{x\overline{n}|} \int\limits_0^\xi v^\lambda\, d\lambda \right)$$

und erhalten zunächst

$$v^k(S_k - {}_k\overline{V}_x) = \int_0^k e^{\int_\xi^k \mu_{x+\xi} d\xi}\, d\left(v^\xi S_\xi - \overline{P}_{x\overline{n}|}\int_0^\xi v^\lambda\, d\lambda\right).$$

Auf die rechte Seite die partielle Integration anwendend, finden wir zunächst

$$v^k\,(S_k - {}_k\overline{V}_x) = \left[e^{\int_\xi^k \mu_{x+\xi} d\xi}\,(v^\xi\, S_\xi - \overline{P}_{x\overline{n}|}\int_0^\xi v^\lambda\, d\lambda)\right]_0^k +$$

$$+\int_0^k e^{\int_\xi^k \mu_{x+\xi} d\xi}\,\mu_{x+\xi}\,(v^\xi\, S_\xi - \overline{P}_{x\overline{n}|}\int_0^\xi v^\lambda\, d\lambda)\, d\xi.$$

Mit der Annahme, daß $s_0 = 0$, folgt ferner

$$v^k\,(S_k - {}_k\overline{V}_x) = v^k\, S_k - \overline{P}_{x\overline{n}|}\left(\int_0^k v^\lambda\, d\lambda + \int_0^k e^{\int_0^k \mu_{x+\xi} d\xi}\,\mu_{x+\xi}\int_0^\xi v^\lambda\, d\lambda\, d\xi\right) +$$

$$+\int_0^k e^{\int_\xi^k \mu_{x+\xi} d\xi}\,\mu_{x+\xi}\, v^\xi\, S_\xi\, d\xi,$$

und da sich mittels partieller Integration

$$\int_0^k v^\lambda\, d\lambda + \int_0^k e^{\int_\xi^k \mu_{x+\xi} d\xi}\,\mu_{x+\xi}\int_0^\xi v^\lambda\, d\lambda\, d\xi = \int_0^k v^\lambda\, d\lambda - \int_0^k d\, e^{\int_\xi^k \mu_{x+\xi} d\xi}\int_0^\xi v^\lambda\, d\lambda =$$

$$= \int_0^k v^\lambda\, d\lambda - \left[e^{\int_\lambda^k \mu_{x+\xi} d\xi}\int_0^\xi v^\lambda\, d\lambda\right]_0^k + \int_0^k e^{\int_\xi^k \mu_{x+\xi} d\xi}\, v^\xi\, d\xi =$$

$$= \int_0^k e^{\int_\xi^k \mu_{x+\xi} d\xi}\, v^\xi\, d\xi$$

ergibt, so erhält man schließlich

$$(S_k - {}_k\overline{V}_x) = \overline{S}_k - \left[P_{x\overline{n}|}\int_0^k e^{\int_\xi^k (\mu_{x+\xi}+\delta) d\xi}\, d\xi - \int_0^k e^{\int_\xi^k (\mu_{x+\xi}+\delta) d\xi}\,\mu_{x+\xi}\, S_\xi\, d\xi\right].$$

Die prospektive Prämienreserve der gemischten Versicherung läßt sich auch darstellen als die Differenz zwischen der auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung diskontierten Versicherungssumme, welche beim

Erleben des Ablaufs der Versicherungsdauer fällig wird, und dem Barwert der künftig zu zahlenden Prämien der Versicherung abzüglich der anteiligen Risikoprämien. Hiernach ist also

$$ {}_k\overline{V}_x = v^{n-k} S_n - \int_k^n v^{\lambda-k} [\overline{P}_{x\overline{n}|} - {}_\lambda\overline{\Pi}_x] \, \mathrm{d}\lambda. $$

Mittels dieser Formel erhalten wir für die Risikoprämie unter Fortlassung des Differentials dk

$$ {}_k\overline{\Pi}_x = \mu_{x+k} \left[S_k - v^{n-k} S_n + \int_k^n v^{\lambda-k} (\overline{P}_{x\overline{n}|} - {}_\lambda\overline{\Pi}_x) \, \mathrm{d}\lambda \right] = $$

$$ = \mu_{x+k} \left[S_k - v^{n-k} S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_k^n v^{\lambda-k} \, \mathrm{d}\lambda \right] - \mu_{x+k} \int_k^n v^{\lambda-k} \, {}_\lambda\overline{\Pi}_x \, \mathrm{d}\lambda, \tag{VIa} $$

und ferner für die Risikosumme allein

$$ (S_k - {}_k\overline{V}_x) = \left(S_k - v^{n-k} S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_k^n v^{\lambda-k} \, \mathrm{d}\lambda \right) - $$

$$ - \int_k^n v^{\lambda-k} \, \mu_{x+\lambda} \, (S_\lambda - {}_\lambda\overline{V}_x) \, \mathrm{d}\lambda. \tag{VIb} $$

Wir wollen uns der Kürze halber auch dieses Mal nur mit der Gleichung (VIb) beschäftigen und sie zum Zwerk der Lösung in der Form

$$ v^k (S_k - {}_k\overline{V}_x) = \left(v^k S_k - v^n S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_k^n v^\lambda \, \mathrm{d}\lambda \right) - \int_k^n \mu_{x+\lambda} \, [v^\lambda (S_\lambda - {}_\lambda\overline{V}_x)] \, \mathrm{d}\lambda $$

schreiben. Durch den Vergleich dieser Gleichung mit der Gleichung (D) ersehen wir, daß wir

$$ g_{(k)} = \left(v^k S_k - v^n S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_k^n v^\lambda \, \mathrm{d}\lambda \right), \quad \mu_\xi = \mu_{x+\xi}, \quad \psi(\xi) = v^\xi \, (S_\xi - {}_\xi\overline{V}_x), $$

$$ \psi(n) = v^n \, (S_n - {}_n V_x) = 0 $$

zu setzen haben. Um die Lösung (IV) anzuwenden, haben wir nur

$$ \mathrm{d}g(\xi) = d \left(v^\xi S_\xi - v^n S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_\xi^n v^\lambda \, \mathrm{d}\lambda \right) $$

zu setzen. Wir erhalten als Vorstufe der endgültigen Lösung

$$ v^k \, (S_k - {}_k\overline{V}_x) = - \int_k^n e^{-\int_k^\xi \mu_{x+\xi} \mathrm{d}\xi} \, \mathrm{d} \left(v^\xi S_\xi - v^n S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_\xi^n v^\lambda \, \mathrm{d}\lambda \right). $$

Wenden wir darauf auf die rechte Seite die partielle Integration an, so folgt

$$v^k\,(S_k - {}_k\overline{V}_x) = -\left[e^{-\int_k^{\xi}\mu_{x+\xi}\,\mathrm{d}\xi}\left(v^{\xi}S_{\xi} - v^{n}S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|}\int_{\xi}^{n} v^{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right)\right]_k^n$$

$$-\int_k^n e^{-\int_k^{\xi}\mu_{x+\xi}\,\mathrm{d}\xi}\,\mu_{x+\xi}\left(v^{\xi}\,S_{\xi} - v^{n}S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|}\int_{\xi}^{n} v^{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right)$$

$$= v^k\,S_k - v^n\,S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|}\int_k^n v^{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda - \int_k^n \mathrm{d}\,e^{-\int_k^{\xi}\mu_{x+\xi}\,\mathrm{d}\xi}\,(v^n\,S_n)$$

$$-\int_k^n e^{-\int_k^{\xi}\mu_{x+\xi}\,\mathrm{d}\xi}\,\mu_{x+\xi}\,v^{\xi}\,S_{\xi}\,\mathrm{d}\xi\,-$$

$$-\,\overline{P}_{x\overline{n}|}\int_k^n e^{-\int_k^{\xi}\mu_{x+\xi}\,\mathrm{d}\xi}\,\mu_{x+\xi}\int_{\xi}^{n} v^{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\xi$$

$$= v^k\,S_k - v^n\,S_n + \overline{P}_{x\overline{n}|}\int_k^n v^{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda - \left(e^{-\int_k^{\xi}\mu_{x+\xi}\,\mathrm{d}\xi} - 1\right)v^n\,S_n$$

$$-\int_k^n e^{-\int_k^{\xi}\mu_{x+\xi}\,\mathrm{d}\xi}\,\mu_{x+\xi}\,v^{\xi}\,S_{\xi}\,\mathrm{d}\xi\,-$$

$$-\,\overline{P}_{x\overline{n}|}\,v^k\left[\int_k^n v^{\lambda-k}\,\mathrm{d}\lambda - \int_k^n e^{-\int_k^{\xi}(\mu_{x+\xi}+\delta)\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]$$

und schließlich

$$(S_k - {}_k\overline{V}_x) = S_k - \left[\int_k^n e^{-\int_k^{\xi}(\mu_{x+\xi}+\delta)\mathrm{d}\xi}\,\mu_{x+\xi}\,S_{\xi}\,\mathrm{d}\xi + e^{-\int_k^{n}(u_{x+\xi}+\delta)}\,S_n\,-\right.$$

$$\left.-\,\overline{P}_{x\overline{n}|}\int_k^n e^{-\int_k^{\xi}(\mu_{x+\xi}+\delta)\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi\right].$$

Zu bemerken wäre auch, daß in diesen Integralgleichungen zwei Integralgleichungen enthalten sind, die schon von Prof. Loewy und von Prof. Berger[6]) auf andere Weise aufgestellt und von letzterem auch auf andere Weise gelöst worden sind. Interessant dürfte wohl auch noch der Hinweis sein, daß man diese Integralgleichungen aus dem Barwert der

Differentialrisikoprämien für einen Teil der Versicherungsdauer herstellen kann. Für die ganze Versicherungsdauer n hat der Verfasser diesen Barwert in seinem Aufsatz „Die mathematische Theorie der Versicherung minderwertiger Leben in kontinuierlicher Behandlung[7])“ (pag 77) berechnet. In einem größeren Aufsatz, welcher die Überschrift trägt „Die durch Bewertung der Rückkäufe ausgestalteten Lebensversicherungen und ihr wahrscheinlichkeitstheoretisches Risiko bei stetiger Prämienberechnung“ und welcher im Jahre 1917 vom Deutschen Verein für Versicherungswissenschaft angenommen wurde, aber infolge der ungünstigen Zeiten nicht veröffentlicht werden konnte, hatte der Verfasser den Barwert der Differentialrisikoprämien für die beliebige Zeitstrecke von t_1 bis t_2 imerhalb der ganzen Dauer n berechnet. Nach Anpassung an die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen und Vereinfachung besteht die Gleichung

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} v^{t-t_1}\, {}_t\overline{\Pi}_x \,\mathrm{d}t &= \int_{t_1}^{t_2} v^{t-t_1}\, \mu_{x+t}\, (S_t - {}_t\overline{V}_x)\, \mathrm{d}t = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} v^{t-t_1}\, (\overline{P}_{x\overline{n}|}\, \mathrm{d}t - \mathrm{d}\, {}_t\overline{V}_x + {}_t\overline{V}_x\, \delta\, \mathrm{d}t) = \\ &= \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_{t_1}^{t_2} v^{t-t_1}\, \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} d\, (v^{t-t_1}\, {}_t\overline{V}_x) = \\ &= \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_{t_1}^{t_2} v^{t-t_1}\, \mathrm{d}t - v^{t_2-t_1}\, {}_{t_2}\overline{V}_x + {}_{t_1}\overline{V}_x.\end{aligned}$$

Für den Fall $t_2 = k$ und $t_1 = 0$ ergibt sich in der Voraussetzung, daß ${}_0\overline{V}_x = 0$,

$$\int_0^k v^t\, \mu_{x+t}\, (S_t - {}_t\overline{V}_x)\, \mathrm{d}t = \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_0^k v^t\, \mathrm{d}t - v^k\, {}_k\overline{V}_x,$$

woraus folgt

$${}_k\overline{V}_x = \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_0^k r^{k-t}\, \mathrm{d}t - \int_0^k r^{k-t}\, \mu_{x+t}\, (S_t - {}_t\overline{V}_x)\, \mathrm{d}t.$$

Setzt man hingegen $t_2 = n$ und $t_1 = k$ und nimmt an, daß ${}_n\overline{V}_x = S_n$, so erhält man

$$\int_k^n v^{t-k}\, \mu_{x+t}\, (S_t - {}_t\overline{V}_x)\, \mathrm{d}t = \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_k^n v^{t-k}\, \mathrm{d}t - v^{n-k}\, S_n + {}_k\overline{V}_x,$$

wonach

$${}_k\overline{V}_x = v^{n-k}\, S_n - \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_k^n v^{t-k}\, \mathrm{d}t + \int_k^n v^{t-k}\, \mu_{x+t}\, (S_t - {}_t\overline{V}_x)\, \mathrm{d}t.$$

Diese beiden Gleichungen fanden übrigens auch schon in dem vorigen, in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz des Verfassers Erwähnung.[8])

Literatur.

1. Leçons sur les équations intégrales et les équations integro-differentielles. Par Vito Volterra, Paris 1913.
2. Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik, Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete, 2. Band. 2 Heft. 1931.
3. Giornale di Matematica Finanziaria, Anno XVII, Serie II, Volume V, Nri 2—3, 1935.
4. Genesi e Costruzione delle Tavole di Mutualità, Roma 1914.
5. Le Probabilità parziali nella Matematica attuariale, Roma 1916.
6. Über simultane Versicherungswerte. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des Deutschen Vereines für Versicherungswesen in der Tschechoslowakischen Republik, Sechstes Heft, Prag 1930.
7. Assekuranz-Jahrbuch, Band 44. Wien 1925.
8. Zwei versicherungmathematische Integralgleichungen. Aktuárské Vědy. Ročník VI, číslo 3, 1936—1937.

ZPRÁVY.

Spolek pro pěstování aktuárských věd uspořádal v březnu a v dubnu 1937 cyklus přednášek o početních podkladech sociálního pojištění dělnického i úřednického. O podkladech invalidního a starobního pojištění dělnického přednášeli dne 5. a 12. března dr. V. Havlík a dr. V. Kalivoda.

O zhodnocení nároků na důchod invalidní a starobní a na výbavné přednášel dr. Havlík. Připomenul, že v sociálním pojištění dělnickém je invalidní a starobní důchod nejdůležitější dávkou, jejíž početní podklady jsou rozhodující pro zjištění rovnováhy pojištění. V roce 1936 činila na př. výplata na invalidních a starobních důchodech 88% výplaty na všech důchodech, resp. 79% výplaty na všech povinných dávkách. V sociálním pojištění není možné spolehlivě stanoviti úmrtnost aktivních pojištěnců a proto je nutno řád aktivnosti, který je základním početním podkladem pro všechny výpočty, stanoviti pomocí známé integrální rovnice na podkladě úmrtnosti lidové a na podkladě pravděpodobnosti invalidisace a výluky z požitku invalidního důchodu. Pokud jde o úmrtnost, bylo přirozeně nutno přejíti od dříve užívané rakouské tabulky z let 1906—1910 k novým tabulkám československým uveřejněným Státním úřadem statistickým v roce 1935. Tyto tabulky vykazují ovšem podstatně nižší úmrtnost, takže je pochopitelné, že také pravděpodobnosti výluky z požitku důchodu invalidního bylo nutno podrobiti revisi. Při tom bylo sice možno částečně použíti vlastního materiálu Ústřední sociální pojišťovny, ježto se však tento materiál vztahuje na poměrně krátkou dobu pozorovací bylo nutno nakonec použíti materiálu říšskoněmeckého z let 1928—29. Při konstrukci čísel $\sigma^{i}_{[x]+k}$ byl vzat na výsledky z vlastního materiálu zřetel a pokud jde o ultimatní tabulky byla čísla pro vyšší věk stanovena s ohledem na lidovou tabulku úmrtnosti.

Také pravděpodobnosti invalidisace bylo sice možno z vlastního materiálu ÚSP. sledovati, avšak při tom bylo nutno pamatovati na to, že velká část důchodů vznikla v době krise, takže pravděpodobnosti z těchto let pocházející jsou podstatně vyšší než s jakými je třeba pro průměr budoucích let počítati. Srovnáním s materiálem říšskoněmeckým bylo zjištěno, že proti číslům dříve používaným nutno aspoň ve vyšších věkových skupinách počítati s pravděpodobnostmi vyššími a to tak, že do věku asi 45 let zůstávají