Fr. Kudela

La démonstration du second théorème limite du calcul de probabilité par la méthode de Cauchy-Lévy reposant sur la fonction caractéristique

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 4, 155–163

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144670

La démonstration du second théorème limite du calcul de probabilité[1] par la méthode de Cauchy-Lévy reposant sur la fonction caractéristique.

Dr. *Fr. Kudela.*

Dans la première partie du traité remarquable: On the composition of elementary errors[2]) de M. H. Cramér, consacré à la déduction des conditions les plus générales, sous l'hypothèse des erreurs élémentaires, pour l'asymptotisme du développement de Bruns-Charlier de la fonction des probabilités totales (la fonction de répartition au sens de Mises) ou de la fonction de probabilité élémentaire, se trouve, entre autres choses, la démonstration d'un certain théorème de convergence. Ce théorème, en se rapportant à la fonction des probabilités totales, forme un cas particulier du second théorème limite du calcul des probabilités. Il dit en principe que la fonction des probabilités totales $\overline{W}_n(z)$ de l'écart normal d'une quantité aléatoire $X_n - \overline{X}_n$ étant la somme de n égales variables aléatoires X indépendantes l'une de l'autre dont la répartition est décrite par la fonction des probabilités totales $V(x)$, la valeur moyenne $\bar{x}$ et l'écart type (l'écart quadratique moyen) σ—converge pour n croissant au delà de toute limite, dans certaines conditions, vers l'intégrale

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t, \tag{1}$$

qui exprime la fonction des probabilités totales d'une variable aléatoire dont la fonction de probabilité élémentaire est donnée par la forme normale de la loi de Laplace-Gauss

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}. \tag{2}$$

Le point de départ pour sa démonstration fait la preuve que la fonction

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(x-\bar{x})}\, \mathrm{d}V(x),$$

adjointe à la fonction donnée $V(x)$, vérifie la relation

$$v(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} [1 + \alpha(t)], \tag{3}$$

---

[1]) Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1928, First Paper, p. 13—74.

[2]) La terminologie employée s'accorde avec la terminologie expliquée dans l'article de l'auteur, publié dans l'année III., cahiers 3 et 4 de ce trimestriel.

où $\alpha(t)$ signifie une fonction égale à zéro pour $t = 0$, et cela toutes les fois qu'il éxiste l'écart type σ fini.

Par une modification convenable du procédé, employé par Cramér pour la démonstration de la rélation (3), on peut parvenir à une formulation très générale du second théorème limite du calcul des probabilités la quantité aléatoire étudiée étant supposée qu'elle se compose d'un grand nombre de variables aléatoires partielles indépendantes l'une de l'autre avec les fonctions des probabilités totales quelconques.

I.

Considérons deux variables aléatoires: l'une $\overline{Z}_n$, dépendant du paramètre n — n étant un nombre entier — l'autre Z. Leurs fonctions caractéristiques, d'après la définition, sont données par les intégrales de Stieltjes

$$\omega_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}\, \mathrm{d}\overline{W}_n(z),$$

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}\, \mathrm{d}\Phi(z)$$

— $\overline{W}_n(z)$, $\Phi(z)$ désignant les fonctions des probabilités totales respectives — qui ont toujours le sens pour toute valeur finie de t.

Si les fonctions des probabilités totales admettent dans tout point du domaine réel une dérivée plus petite qu'un nombre positif μ ainsi qu'il soit

$$\begin{aligned} |\,\overline{W}_n(z+h) - \overline{W}_n(z)\,| &< \mu\,|\,h\,|, \\ |\,\Phi(z+h) - \Phi(z)\,| &< \mu\,|\,h\,|, \end{aligned} \tag{4}$$

on peut montrer que la condition suffisante pour que la fonction $\overline{W}_n(z)$ tende, n augmentant indéfiniment, vers $\Phi(z)$ est que la fonction caractéristique $\omega_n(t)$ tend, pour n infini, vers $\omega(t)$, et cela uniformément pour t variant dans un intervalle fini $(-T, +T)$. La première des conditions ci-dessus peut être remplacée par la supposition que la fonction $\overline{W}_n(z)$ est uniformément continue par rapport au paramètre n, est-à-dire que, $\varepsilon > 0$ étant donnée, on peut trouver un nombre positif $\eta(\varepsilon)$, fonction de ε seul, tel que pour n'importe quel n

$$|\,\overline{W}_n(z+h) - \overline{W}_n(z)\,| < \varepsilon \text{ si } |\,h\,| < \eta(\varepsilon).$$

La démonstration de cette proposition était donnée par M. Lévy[3]) et, d'une façon plus élargie, par M. Castelnuovo[4]). C'était celui-ci qui s'était affranchi, quant à la fonction $\overline{W}_n(z)$, de la supposition restrictive citée plus haut en applicant aux quantités aléatoires étudiées la compo-

[3]) Calcul des Probabilités, 1925, p. 192—200.

[4]) Calcolo delle Probabilità, ed. Secondo, vol. II, 1928, § 19—21.

sition avec une variable aléatoire auxiliaire possédant une densité constante de probabilité comme l'a déjà indiqué M. Lévy. Sur cette base il a démontré qu'il faut seulement que la fonction limite des probabilités totales $\Phi(z)$ remplisse l'inégalité (4) pour que la convergence de la fonction caractéristique $\omega_n(t)$ vers la fonction $\omega(t)$ soit la condition suffisante pour la convergence des fonctions des probabilités totales respectives.

La proposition énoncée ci-dessus fait la substance de la démonstration de M. Lévy d'un théorème fondamentale du calcul des probabilités établissant le rôle de la lois de Laplace-Gauss dans le domaine des phénomènes aléatoires.

II.

Répartition d'une quantité aléatoire avec la valeur moyenne égale à zéro et avec l'écart type égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ soit désignée comme répartition normale. Il est bien connu que toute quantité aléatoire X, ayant la valeur moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ, se change par une transformation simple

$$Z = \frac{X - \overline{x}}{\sigma\sqrt{2}}$$

en une quantité aléatoire Z, avec la répartition normale, laquelle soit appelée écart normal.

Puisque la répartition d'une variable aléatoire continue, dont la densité de probabilité est exprimée par la forme normale (2) de la loi de Laplace-Gauss, constitue une répartition normale, il est visible que le second théorème limite du calcul des probabilités peut être formulé d'une autre façon comme l'ensemble de conditions sous lesquelles la fonction des probabilités totales appartenant à la répartition normale de la quantité étudiée aléatoire $\overline{X}_n$ — $\overline{X}_n$ étant la somme de n variables aléatoires indépendantes l'une de l'autre X_k

$$\overline{X}_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{5}$$

— tend, pour n croissant au delà de toute limite, vers la fonction des probabilités totales (1) de la forme normale de la loi de Laplace-Gauss.

Eu régard au fait que la fonction (1) remplit la condition (4), il faut et il suffit pour cette convergence, d'après le raisonnement de la partie I., que la fonction caractéristique de l'écart normal de la quantité donnée $\overline{X}_n$

$$\omega_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}\, d\overline{W}_n(z), \tag{6}$$

$\overline{W}_n(z)$ étant la fonction des probabilités totales, tende, pour n infini, vers la fonction caractéristique de la répartition (1)

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}\, \mathrm{d}\Phi(z) = e^{-\frac{t^2}{4}},$$

et cela pour toutes valeurs de t, pour lesquelles $|t| \leqq T$.

La fonction des probabilités totales de la variable partielle X_k soit $V_k(x)$. Dans cette condition la fonction des probabilités totales $W_n(x)$ de la quantité composée (5) est, comme on sait, exprimée explicitement par la formule

$$W_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} V_n(x - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1})\, \mathrm{d}V_{n-1}(x_{n-1}) \ldots \mathrm{d}V_1(x_1).$$

La valeur moyenne a_n et l'écart type s_n de la même quantité sont données par les relations connues

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k},$$

$$s_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2},$$

$\overline{x_k}(\sigma_k)$ désignant la valeur moyenne (l'écart type) de la variable partielle X_k.

Considérons maintenant les écarts normaux appartenant à la variable (5) et à ses variables composantes X_k. Ainsi l'écart normal de la variable X_k est définie par

$$Z_k = \frac{X_k - \overline{x_k}}{\sigma_k \sqrt{2}}$$

et sa fonction des probabilités totales est évidemment

$$\overline{V}_k(z) = V_k(\overline{x_k} + z \,.\, \sigma_k \sqrt{2}).$$

Par analogie l'écart normal de la quantité résultante (5) est exprimée par la formule

$$\overline{Z_n} = \frac{\overline{X_n} - a_n}{s_n \sqrt{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \overline{x_k}}{s_n \sqrt{2}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Z}_k, \tag{7}$$

où

$$\overline{Z}_k = Z_k \,.\, \frac{\sigma_k}{s_n}$$

désigne une variable aléatoire dont la fonction des probabilités totales est

$$\overline{V}_k \left(z \,.\, \frac{s_n}{\sigma_k}\right) = V_k(\overline{x_k} + z \,.\, s_n \sqrt{2}).$$

Conformément à cette notation, la fonction des probabilités totales

$\overline{W}_n(z)$ de la variable (7) sera exprimée par la formule

$$\overline{W}_n(z) = W_n(a_n + z \,.\, s_n\sqrt{2}).$$

Nous allons introduire dans nos études, de fonctions

$$g_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x-\overline{x}_k)}\, \mathrm{d}V_k(x)$$

que nous allons — par analogie avec les fonctions adjointes transformées de Mises — appeller fonctions caractéristiques transformées. La fonction caractéristique de la variable Z_k est définie par l'intégrale

$$h_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}\, \mathrm{d}\overline{V}_k(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\frac{x-\overline{x}k}{\sigma_k\sqrt{2}}}\, \mathrm{d}V_k(x)$$

de sorte qu'il est

$$h_k(t) = g_k\left(\frac{t}{\sigma_k\sqrt{2}}\right);$$

la fonction caractéristique de la variable $\overline{Z}_k$ sera donc

$$\overline{h}_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}\, \mathrm{d}\overline{V}_k\left(z \,.\, \frac{s_n}{\sigma_k}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\frac{x-\overline{x}_k}{s_n\sqrt{2}}}\, \mathrm{d}V_k(x) = g_k\left(\frac{t}{s_n\sqrt{2}}\right).$$

De la théorie des fonctions caractéristiques, il est bien connu que la fonction caractéristique d'une somme de quantités aléatoires indépendantes l'une de l'autre est égale au produit des fonctions caractéristiques de ses éléments,[5]) par conséquent la fonction caractéristique $\omega_n(t)$ de la quantité (7) est donnée par la formule

$$\omega_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \overline{h}_k(t) = \prod_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{t}{s_n\sqrt{2}}\right), \tag{8}$$

comme serait d'ailleurs facile à prouver par un raisonnement direct au moyen de l'expression explicite de $\overline{W}_n(z)$.

Examinons maintenant l'expression

$$\frac{g_k(t)-1}{t^2} + \frac{\sigma_k^2}{2} \tag{9}$$

prenant la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it(x-\overline{x}_k)} - 1 - it\,(x-\overline{x}_k) + \frac{1}{2}\,t^2\,(x-\overline{x}_k)^2}{t^2}\, \mathrm{d}V_k(x)$$

[5]) Par exemple Lévy, l. c., p. 184.

à cause de la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x}_k)\, \mathrm{d}V_k(x) = 0.$$

Pour les valeurs réelles du paramètre t, les inégalités suivantes sont valables

$$| e^{it(x-\bar{x}_k)} - 1 - it(x - \bar{x}_k) | \leqq \tfrac{1}{2}\, t^2\, (x - \bar{x}_k)^2,$$
$$| e^{it(x-\bar{x}_k)} - 1 - it\, (x - \bar{x}_k) + \tfrac{1}{2}\, t^2\, (x - \bar{x}_k)^2 | \leqq \tfrac{1}{6}\, | t |^3 \cdot | x - \bar{x}_k |^3.$$

En désignant

$$\frac{e^{it(x-\bar{x}_k)} - 1 - it\, (x - \bar{x}_k)}{t^2} = f_k(x, t)$$

on peut écrire

$$| f_k(x, t) | \leqq \tfrac{1}{2}\, (x - \bar{x}_k)^2 \tag{10}$$

d'une part, et

$$| f_k(x, t) + \tfrac{1}{2}\, (x - \bar{x}_k)^2 | \leqq \tfrac{1}{6}\, | t | \cdot | x - \bar{x}_k |^3 \tag{11}$$

d'autre part. Divisons l'intervalle d'intégration par un nombre M convenablement à choisir. Pour la valeur absolue de l'expression (9) on obtient par là cette inégalité:

$$\left| \frac{g_k(t) - 1}{t^2} + \frac{\sigma_k^2}{2} \right| \leqq \left| \int_{-\infty}^{-M+\bar{x}_k} [f_k(x, t) + \tfrac{1}{2}\, (x - x_k)^2]\, \mathrm{d}V_k(x) \right| +$$
$$+ \left| \int_{-M+\bar{x}_k}^{+M+\bar{x}_k} [f_k(x, t) + \tfrac{1}{2}\, (x - \bar{x}_k)^2] \mathrm{d}V_k(x) \right| + \left| \int_{+M+\bar{x}_k}^{\infty} [f_k(x, t) + \tfrac{1}{2}\, (x - \bar{x}_k)^2]\, \mathrm{d}V_k(x) \right|.$$

Tenant compte de l'inégalité (11) il s'ensuit que

$$\left| \int_{-M+\bar{x}_k}^{+M+\bar{x}_k} [f_k(x, t) + \tfrac{1}{2}\, (x - \bar{x}_k)^2]\, \mathrm{d}V_k(x) \right| \leqq$$
$$\leqq \frac{| t |}{6} \int_{-M+\bar{x}_k}^{+M+\bar{x}_k} | x - \bar{x}_k |^3\, \mathrm{d}V_k(x) < \frac{| t |}{6}\, M^3.$$

Grâce à l'inégalité (10) nous obtenons plus loin d'une part

$$\left| \int_{-\infty}^{-M+\bar{x}_k} [f_k(x, t) + \tfrac{1}{2}\, (x - \bar{x}_k)^2]\, \mathrm{d}V_k(x) \right| < \int_{-\infty}^{-M+\bar{x}_k} (x - x_k)^2\, \mathrm{d}V_k(\bar{x}),$$

et d'autre part

$$\left|\int_{+M+\bar{x}_k}^{+\infty} [f_k(x, t) + \tfrac{1}{2}(x - \bar{x}_k)^2]\, \mathrm{d}V_k(x)\right| < \int_{+M+\bar{x}_k}^{+\infty} (x - \bar{x}_k)^2\, \mathrm{d}V_k(x).$$

Supposons à présent qu'on peut choisir ce nombre M de telle façon qu'on ait, quel que soit k,

$$\int_{-M+\bar{x}_k}^{+M+\bar{x}_k} (x - \bar{x}_k)^2\, \mathrm{d}V_k(x) \geqq \sigma_k^2 - \varepsilon, \tag{12}$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

Dans cette condition

$$\left|\int_{-\infty}^{-M+\bar{x}_k} [f_k(x, t) + \tfrac{1}{2}(x - \bar{x}_k)^2]\, \mathrm{d}V_k(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_{+M+\bar{x}_k}^{+\infty} [f_k(x, t) + \tfrac{1}{2}(x - \bar{x}_k)^2]\, \mathrm{d}V_k(x)\right| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots$$

En choisissant la valeur de t assez petite, par exemple de telle manière qu'it soit $|t| \leqq \frac{6\varepsilon}{M^3}$, on a pour n'importe quel k

$$\left|\frac{g_k(t) - 1}{t^2} - \frac{\sigma_k^2}{2}\right| < \frac{1}{6} M^3 \,.\, |t| + \varepsilon \leqq 2\varepsilon,$$

donc

$$g_k(t) = 1 - \frac{t^2}{2} \sigma_k^2 [1 + \alpha(t)], \tag{13}$$

où $\alpha(t)$ signifie une fonction, tendant vers zéro avec t. D'après la formule fondamentale (13), qui venait d'être démontrée, la relation (8) prend la forme

$$\omega_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \left\{1 - \frac{t^2}{4} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \left[1 + \alpha\left(\frac{t}{s_n\sqrt{2}}\right)\right]\right\} = \prod_{k=1}^{n} \left\{1 - \frac{\frac{t^2}{4}\left[1 + \alpha\left(\frac{t}{s_n\sqrt{2}}\right)\right]}{\frac{s_n^2}{\sigma_k^2}}\right\}.$$

σ désignant le plus grand des écarts $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, il suffit que le rapport $\frac{s_n^2}{\sigma^2}$ croisse, au moins à partir d'un certain nombre $n \geqq n_0$, au délà de toute limite comme n

$$\frac{s_n^2}{\sigma^2} \backsim n \tag{14}$$

pour que

$$\omega_n(t) \backsim \left\{ 1 - \frac{\frac{t^2}{4}\left[1 + \alpha\left(\frac{t}{s_n\sqrt{2}}\right)\right]}{n} \right\}^n \backsim e^{-\frac{t^2}{4}} = \omega(t),$$

puisque $\alpha\left(\frac{t}{s_n\sqrt{2}}\right)$, dans cette condition, tend vers zéro (avec n augmentant indéfiniment) si t varie dans un intervalle fini $(-T, +T)$.

De cette manière on a prouvé la convergence uniforme de la fonction caractéristique $\omega_n(t)$ de l'écart normal d'une quantité aléatoire, somme d'un grand nombre de variables composantes indépendantes l'une de l'autre, vers la fonction caractéristique de la forme normale de la loi de Laplace-Gauss $\omega(t)$ et donc, d'après la proposition fondamentale exposée dans la première partie de cette note, la convergence de la fonction des probabilités totales $\overline{W}_n(z)$ vers la fonction $\Phi(z)$ (1).

On peut énoncer le théorème suivant:

Etant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut trouver un nombre entier n_0 tel que pour $n \geqq n_0$ l'inégalité

$$\left| W_n(a_n + z \,.\, s_n\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \right| < \varepsilon$$

soit verifiée, et cela uiniformément pour tout $z = \frac{x - a_n}{s_n\sqrt{2}}$, s'il existe un nombre positif M commun à toutes les répartitions des variables partielles ainsi que relation (12) a lieu, et si le rapport $\frac{s_n{}^2}{\sigma^2}$ augmente au delà de toute limite avec l'ordre de n, σ désignant le plus grand des nombres $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

La discussion de deux conditions figurant dans l'énoncé du théorème précédent montre qu'il s'agit, en principe, d'un théorème tout à fait égal au théorème de M. Lévy,[6]) lequel fut démontré par le raisonnement à peu près analogue, en employant, pour la démonstration, les logarithmes des fonctions caractéristiques.

Leur analyse mène aux rémarques suivantes:

1. La condition (12) exige non seulement que les écarts types σ_k des variables partielles soient finis mais encore que la convergence des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x}_k)^2 \,\mathrm{d}V_k(x) \tag{15}$$

[6]) l. c., h. 234.

qui les définissent, soit en certain sens uniforme. En d'autres termes, elle demande que les valeurs de chaque variable partielle se concentrent autour de la valeur moyenne respective de sorte qu'on commettra une erreur au plus égal à ε, ε étant un nombre arbitrairement petit, sur chacun des l'intégrales (15) si l'on néglige des valeurs x de la variable pour lesquelles

$$| x - \bar{x}_k | > M,$$

où M ne dépend que de ε.

2. La deuxième condition suffisante (14) du théorème sera sûrement réalisée, si les nombres σ_k font une suite supérieurement bornée avec une limite supérieure uniforme (c'est-à-dire indépendante de l'indice k) et si la somme de leurs carrés

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \ldots + \sigma_n^2 + \ldots$$

diverge, cette divergence étant d'ordre de n. Cela aura lieu lorsque les nombres σ_k^2 sont tous du même ordre de grandeur, à savoir s'ils ont une limite supérieure finie S^2

$$\sigma_k^2 \leqq S^2.$$

Dans ce cas le nombre σ est égal à S et le rapport

$$\frac{s_n^2}{\sigma^2}$$

augmente comme n.

Sur les fonctions de fréquence de *n* variables. Relation générale entre les moments et les semi-invariants.

par *E. Franckx* (Bruxelles).

I. Moments et fonctions caractéristiques.

Dans le cas d'une fonction de fréquence discontinue de n variables

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Le moment d'ordre $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$ est défini par:

$$m_{k_1|k_2|\ldots|k_n} = \sum_{x_1}\sum_{x_2} \ldots \sum_{x_n} f(x_1 x_2 \ldots x_n)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \tag{1}$$

les sommations s'étendant pour chaque variable:

x_1: de 0 *à* n_1;
x_2: de 0 *à* n_2;
$\vdots$
x_n: de 0 *à* n_n.