Jiří Seitz

Remarques sur l'ajustement analytique des tables de mortalité

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 3, 122–136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144665

nution de l'espérance de vie à cet âge, a une influence défavorable du point de vue de la longévité.

Malgré la simplicité des calculs analytiques et malgré l'approximation assez grossière utilisée, l'accord entre la théorie et l'expérience montré par les tables Américaines est satisfaisant. Il faudra bien distinguer notre théorie générale de l'âge limite et l'application que nous en faisons en employant la formule de Lexis.

Les observations faites sur le plus grand âge en Suisse pendant 55 années montrent que la distribution de ces valeurs est bien celle qu'il fallait attendre. Cette comparaison ne nécessite aucun choix d'une formule biométrique. La théorie est encore verifiée par les valeurs extrêmes de ces distributions. Cet accord est possible parce que ces cas apparément individuels reposent sur de nombreuses observations. En ce sens et aussi du point de vue analytique nos raisonnements sont parallèles aux recherches de Bortkiewicz qui ont abouti à la loi des évènements rares.

En somme la théorie qui semble paradoxale suivant laquelle il n'y a pas d'âge limite fixe est en accord avec les observations. Et ainsi sont contredit tous les arguments qui reposent sur l'existence d'un tel âge.

Remarques sur l'ajustement analytique des tables de mortalité.

Par *Jiří Seitz* (Prague).

Soit une table de mortalité ajustée selon une loi analytique où figurent un certain nombre de paramètres. Nous envisageons le cas où les valeurs attribuées à ces paramètres viennent à être modifiées et nous nous proposons d'étudier les variations qui en découlent pour les principales fonctions actuarielles. La recherche des solutions des problèmes qui se trouvent ainsi posés est d'autant plus importante qu'à l'heure actuelle on constate une évolution très rapide du phénomène de mortalité.

Dans le cas de la loi de Makeham, cette question a été traitée par Friedli, dans la deuxième partie d'un article „Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen" qui a paru dans les „Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker", No 13, 1918. Friedli arrive à ses résultats, en faisant appel à la théorie des fonctions Γ incomplètes. Nous allons démontrer qu'une partie des relations établies dans son article sont des cas particuliers des relations générales valables pour toutes les lois de Quiquet.

Soient μ_x le taux instantané de mortalité, δ le taux instantané d'intérêt et

$$\eta(x) = \mu_x + \delta.$$

Pour la loi de mortalité de Quiquet du n-ième ordre, nous pouvons considérer $\eta(x)$ comme solution de l'équation differentielle linéaire et homogène, à coefficients constants

$$c_0\,\eta(x) + c_1\,\eta'(x) + \ldots + c_n\,\eta^{(n)}(x) + \eta^{(n+1)}(x) = 0. \tag{1}$$

Ecrivons l'équation caractéristique de l'équation (1) sous la forme

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + x^{n+1} \equiv$$
$$\equiv x^{\lambda_0}(x - r_1)^{\lambda_1}(x - r_2)^{\lambda_2} \ldots (x - r_i)^{\lambda_i} = 0,$$
$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_i = n + 1.$$

Les racines $r_1, r_2, \ldots, r_i$ sont différentes de zéro. Le plus souvent δ est indépendant de x, et l'équation caractéristique possède au moins une racine nulle, et par suite $c_0 = 0$. Toutefois si δ est également une fonction de x rien n'est changé dans ce qui suit: il suffit de rappeler que cette fonction doit être telle que $\mu_x + \delta$ soit solution de l'équation (1).

La solution la plus générale de l'équation (1) peut être écrite de la manière suivante:

$$\eta(x) = \sum_{s=0}^{\lambda_0-1} a_s^{r_0}\, x^s + \sum_{s=0}^{\lambda_1-1} a_s^{r_1} r_1 x^s e^{r_1x} + \ldots + \sum_{s=0}^{\lambda_i-1} a_s^{r_i}\, r_i\, x^s\, e^{r_ix}.$$

En posant

$$\sum_{s=0}^{\lambda_0-1} a_s^{r_0}\, x^s = \eta_0(x)$$
$$\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k}\, x^s\, e^{r_kx} = \eta_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, i),$$

nous arrivons à

$$\eta(x) = \sum_{k=0}^{i} \eta_k(x), \tag{2}$$

où les $a_s^{r_k}$ sont des constantes quelconques au nombre total de $(n + 1)$ et les $a_s^{r_0}$ sont les constantes qui correspondent à la racine nulle.

La valeur actuelle de la rente temporaire dont le montant est défini par une fonction $\varphi(x + t)$ de telle sorte qu'un versement $\varphi(x + t)\,\Delta t$ soit effectué dans tout interval de temps $t, t + \Delta t$, s'obtient par la formule

$$\bar{a}_{x\overline{m|}}(\varphi) = \int_0^m e^{-\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau}\, \varphi(x + t)\, dt;$$

en dérivant cette équation par rapport à $a_s^{r_0}$ nous obtenons $(s = 0, 1, \ldots, \lambda - 1)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial a_s^{r_s}} &= -\int_0^m e^{-\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau} \frac{\partial}{\partial a_s^{r_s}}\left[\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau\right]\varphi(x+t)\,dt = \\ &= -\int_0^m e^{-\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau} \int_0^t (x+\tau)^s\,d\tau\,\varphi(x+t)\,dt,\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

en vertu de

$$\frac{\partial \eta(x)}{\partial a_s^{r_s}} = x^s.$$

En dérivant par rapport à $a_s^{r_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, i;\ s = 0, 1, \ldots, \lambda_{k-1})$ nous avons

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial a_s^{r_k}} &= -\int_0^m e^{-\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau} \frac{\partial}{\partial a_s^{r_k}}\left[\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau\right]\varphi(x+t)\,dt = \\ &= -r_k\int_0^m e^{-\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau} \int_0^t (x+\tau)^s\, e^{r_k(x+\tau)}\,d\tau\,\varphi(x+t)\,dt,\end{aligned}\right\} \quad (3')$$

en vertu de

$$\frac{\partial \eta(x)}{\partial a_s^{r_k}} = r_k\, x^s\, e^{r_k x}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, i;\ s = 0, 1, \ldots, \lambda_{k-1}).$$

En dérivant par rapport à r_k nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial r_k} &= -\int_0^m e^{-\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau} \frac{\partial}{\partial r_k}\left[\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau\right]\varphi(x+t)\,dt = \\ &= -\int_0^m e^{-\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau} \int_0^t \left[\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k}\,(x+\tau)^s + r_k \sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k}(x+\tau)^{s+1}\right]. \\ &\qquad . e^{r_k(x+\tau)}\,d\tau\,\varphi(x+t)\,dt,\end{aligned}\right\} \quad (3'')$$

en vertu de

$$\frac{\partial \eta(x)}{\partial r_k} = \left[\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k}\, x^s + r_k \sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k} x^{s+1}\right] e^{r_k x}$$

Nous nons proposons maintenant de rechercher des fonctions des arguments $x, a_s^{r_k}, r_k,$ soient $A_s^{r_k}$ $(k = 0, 1, \ldots, i;\ s = 0, 1, \ldots, \lambda_{k-1})$ et R_k $(k = 1, 2, \ldots, i)$, qui satisfont identiquement à l'équation en t:

$$\begin{aligned} -\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} A_s^{r_k}\frac{\partial}{\partial a_s^{r_k}}\left[\int_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] - \sum_{k=0}^{i} R_k\frac{\partial}{\partial r}\cdot \\ \cdot\left[\int_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = t\,\eta(x+\tau). \end{aligned} \tag{4}$$

Si cette relation est vérifiée nous pouvons déduire des relations (2) et (3)

$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} A_s^{r_k}\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial a_s^{r_k}} + \sum_{k=1}^{i} R_k\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial r_k} =$$

$$= \int_0^m e^{-\int_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau}\, t\,\eta(x+t)\,\varphi(x+t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[-e^{\int_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau}\, t\,\varphi\,(x+t)\right]_{t=0}^{t=m} + \int_0^m e^{-\int_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,[t\,\varphi(x+t)]'\,\mathrm{d}t,$$

où $[t\,\varphi(x+t)]'$ représente une dérivée par rapport à t.

Cela nous amène à

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} A_s^{r_k}\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial a_s^{r_k}} + \sum_{i=1}^{k} R_k\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial r_k} = \\ = -\frac{D_{x+m}}{D_x}\, m\,\varphi(x+m) + \bar{a}_{x\overline{m}|}\,([t\,\varphi(x+t)]'). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Nous allons voir maintenant que la relation (4) peut être satisfaite. Nous choisirons pour $A_s^{r_k}$ et R_k les expressions ci-dessous et nous allons démontrer qu'elles satisfont identiquement en t la relation (4). Ces expressions sont les suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &A_s^{r_0} = -a_s^{r_0}(s+1) + a_{s+1}^{r_0}(s+1)\,x \quad (s = 0, 1, \ldots, \lambda_0 - 1) \\ &A_s^{r_k} = -a_s^{r_k}(s - r_k x) + a_{s+1}^{r_k}(s+1)\,x \\ &\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, i;\ s = 0, 1, \ldots, \lambda_k - 1) \\ &R_k = -r_k. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nous portons ces expressions dans le premier membre de l'équation (4). La partie qui correspond à la racine nulle, i. e. les termes pour lesquels $k = 0$, donne

$$-\sum_{s=0}^{\lambda_0-1} A_s^{r_0} \frac{\partial}{\partial a_s^{r_0}}\left[\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau\right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda_0-1} [a_s^{r_0}(s+1) - a_{s+1}^{r_0}(s+1)\,x]\int_0^t (x+\tau)^s\,d\tau =$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda_0-1} a_s^{r_0} \int_0^t [(s+1)(x+\tau) - sx]\,(x+\tau)^{s-1}\,d\tau =$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda_0-1} a_s^{r_0} \int_0^t [(x+\tau)^s + s\tau(x+\tau)^{s-1}]\,d\tau =$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda_0-1} a_s^{r_0} \int_0^t \frac{[d\tau(x+\tau)^s]}{d\tau}\,d\tau = \sum_{s=0}^{\lambda_0-1} a_s^{r_0}\, t(x+t)^s = t\,\eta_0(x+t);$$

d'où

$$-\sum_{s=0}^{\lambda_0-1} A_s^{r_0} \frac{\partial}{\partial a_s^{r_0}}\left[\int_0^r \eta(x+\tau)\,d\tau\right] = t\,\eta_0(x+t). \qquad (7)$$

Si k est égal à 1, 2, . . ., i, nous avons

$$-\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} A_s^{r_k} \frac{\partial}{\partial a_s^{r_k}}\left[\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau\right] - R_k \frac{\partial}{\partial r_k}\left[\int_0^t \eta(x+\tau)\,d\tau\right] =$$

$$= r_k \sum_{s=0}^{\lambda_k-1} [a_s^{r_k}(s - r_k x) - a_{s+1}^{r_k}(s+1)\,x]\int_0^t (x+\tau)^s\, e^{r_k(x+\tau)}\,d\tau +$$

$$+ r_k \int_0^t \left[\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k}(x+\tau)^s e^{r_k(x+\tau)} + r_k \sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k}(x+\tau)^{s+1} e^{r_k(x+\tau)}\right] d\tau =$$

$$= r_k \sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k} \int_0^t [(s - r_k x)(x+\tau)^s - sx(x+\tau)^{s-1} + (x+\tau)^s +$$
$$+ r_k(x+\tau)^{s+1}]\, e^{r_k(x+\tau)}\,d\tau =$$

$$= r_k \sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k} \int_0^t [(x+\tau)^s e^{s_k(x+\tau)} + \tau\, s(x+\tau)^{s-1} e^{r_k(x+\tau)} +$$
$$+ \tau(x+\tau)^s r_k e^{r_k(r+\tau)}]\,d\tau =$$

$$= r_k \sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k} \int_0^t \frac{d[\tau(x+\tau)^s e^{r_k(x+\tau)}]}{d\tau}\,d\tau =$$

$$= r_k \sum_{s=0}^{\lambda_k-1} a_s^{r_k}\, t(x+t)^s e^{r_k(x+t)} = t\,\eta_k(x+t),$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} -\sum\limits_{s=0}^{\lambda_k-1} A_s^{r_k} \dfrac{\partial}{\partial a_s^{r_k}}\left[\int\limits_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] - R_k \dfrac{\partial}{\partial r_k}\left[\int\limits_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \\ \qquad = t\,\eta_k(x+t); \quad k = 1, 2, \ldots, i. \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Si nous ajoutons membre à membre l'équation (7) et toutes les équations de la forme (8) et si nous nous rapportons à l'équation (2) nous obtenons

$$-\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} A_s^{r_k} \frac{\partial}{\partial a_s^{r_k}}\left[\int\limits_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] - \sum_{k=1}^{i} R_k \frac{\partial}{\partial r_k}\left[\int\limits_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] =$$
$$= t\sum_{k=0}^{i} \eta_k(x+t) = t\,\eta(x+t).$$

Le système des expressions (6) vérifie donc la relation (4) identiquement en t.

Il est nécessaire de prouver, pour être complèt, que si l'équation (4) èst satisfaite par un système des expressions $A_s^{r_k}$ et R_k celui-ci ne peut être que le système (6).

Supposons qu'en dehors du système $A_s^{r_k}$ et R_k il y ait un autre système d'expressions $B_s^{r_k}$ et T_k tel que soit satisfaite identiquement en t la relation

$$-\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} B_s^{r_k} \frac{\partial}{\partial a_s^{r_k}}\left[\int\limits_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] - \sum_{k=1}^{i} T_k \frac{\partial}{\partial r_k}\left[\int\limits_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] =$$
$$= t\,.\,\eta(x+t).$$

Si de cette équation nous retranchons l'équation (4), nous arrivons à

$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} (A_s^{r_k} - B_s^{r_k}) \frac{\partial}{\partial a_s^{r_k}}\left[\int\limits_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{i} (R_k - T_k) \frac{\partial}{\partial r_k}\left[\int\limits_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \equiv 0.$$

En dérivant cette identité $(l+1)$ fois par rapport à t et en faisant $t=0$ nous obtenous

$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} (A_s^{r_k} - B_s^{r_k}) \frac{\partial}{\partial a_s^{r_k}} \eta^{(l)}(x) + \sum_{k=1}^{i} (R_k - T_k) \frac{\partial}{\partial r_k} \eta^{(l)}(x) = 0.$$

Pour $l = 0, 1, 2, \ldots, n+i$ cette équation donne $n+i+1$ équations linéaires homogènes où figurent $(n+i+1)$ inconnues $(A_s^{r_k} - B_s^{r_k})$ et $(R_k - T_k)$.

Le déterminant de ces équations est le déterminant de Wronski des fonctions suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial a_s^{r_k}} \eta(x); \ (k = 0, 1, \ldots, i; \ s = 0, 1, \ldots, \lambda_k - 1)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r_k} \eta(x); \quad (k = 1, 2, \ldots, i);$$

ces fonctions ont — en omettant les facteurs constants — la forme suivante:

$$\begin{array}{l} 1, \ x, \ x^2, \ \ldots, x^{\lambda_0 - 1}, \\ e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{\lambda_1 - 1} e^{r_1 x}, \\ e^{r_2 x}, xe^{r_2 x}, x^2 e^{r_2 x}, \ldots, x^{\lambda_2 - 1} e^{r_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{r_i x}, xe^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, \ldots, x^{\lambda_i - 1} e^{r_i x}; \\ P_1(x) e^{r_1 x}, \ P_2(x) e^{r_2 x}, \ldots, P_i(x) e^{r_i x}; \end{array}$$

où $P_k(x)$ est un polynome de dégré λ_k.

Ces fonctions sont indépendantes et par conséquent leur déterminant de Wronski est différent de zéro pour toute valeur de x. Il résulte de la théorie des équations linéaires que

$$\begin{array}{l} A_s^{r_k} \equiv B_s^{r_k} \ (k = 0, 1, 2, \ldots, i; \ s = 0, 1, 2, \ldots, \lambda_k - 1) \\ R_k \equiv T_k \ (k = 1, 2, \ldots, i). \end{array}$$

L'équation (4) ne peut donc être satisfaite que par le seul système (6) d'expressions $A_s^{r_k}$ et R_k.

Nous allons maintenant indiquer quelques cas particuliers de la relation (4).

1. Loi de Gompertz.

$$n = 1, \ c_0 = 0, \ r_1 = \gamma, \ \lambda_1 = 1, \ c_1 = -\gamma.$$

L'équation (1) a la forme

$$-\gamma \, \eta'(x) + \eta''(x) = 0.$$

En outre

$$a_0^{r_0} = \delta, \ a_0^{r_1} = \beta;$$

et $\eta(x)$ s'écrit

$$\eta(x) = \delta + \beta\gamma e^{\gamma x}.$$

Le système (6) conduit alors aux valeurs suivantes

$$A_0^{r_0} = -\delta, \ A_0^{r_1} = \beta\gamma x, \ R_1 = -\gamma;$$

et l'équation (5) donne

$$-\gamma \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \gamma} + \beta\gamma\, x \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \beta} - \delta \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \delta} =$$

$$= \bar{a}_{x\overline{m}|}\,[(t\,\varphi(x+t))'] - \frac{D_{x+m}}{D_x}\, m\,\varphi(x+m).$$

2. Loi de Makeham

$$n = 1,\ c_0 = 0,\ r_1 = \gamma,\ \lambda_0 = \lambda_1 = 1,\ c_1 = -\gamma.$$

L'équation (1) a la forme

$$-\gamma\,\eta'(x) + \eta''(x) = 0.$$

En outre

$$a_0^{r_0} = \alpha + \delta = A;\ a_0^{r_1} = \beta;$$

et $\eta(x)$ s'écrit

$$\eta(x) = A + \beta\gamma e^{\gamma x}.$$

Pour les expressions $A_s^{r_k}$ et R_k nous avons alors

$$A_0^{r_0} = -A,\ A_0^{r} = \beta\gamma x,\ R_1 = -\gamma;$$

et l'équation (5) donne

$$\left.\begin{aligned} -\gamma \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \gamma} + \beta\gamma x \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \beta} - A \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial A} = \\ = \bar{a}_{x\overline{m}|}\,[(t\,\varphi(x+t))'] - \frac{D_{x+m}}{D_x}\, m\,\varphi(x+m). \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

Si nous écrivons la loi de Makeham sous la forme $l(x) = ks^x g^{c^x}$,

$$\gamma = \log c,\ \beta = -\log g,\ \alpha = -\log s,\ A = \alpha + \delta = \log \frac{1}{s} + \delta;$$

d'où il suit

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial c}.\, c;\ \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial g}\,.\,(-g);\ \frac{\partial}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial s}\,.\,(-s).$$

Si nous appliquons ces formules à (5′), nous arrivons à

$$-c \log c \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial c} - g \left(\log \frac{1}{g}\right) (\log c)\, x \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g} + s \left(\log \frac{1}{s} + \delta\right) \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial s} = \bar{a}_x. \quad (5'')$$

Nous avons pris $m = \infty$ et $\varphi(x+t) \equiv 1$. La relation (5″) figure dans l'article de Friedli, cité plus haut.

3. Loi de Lazarus:

$$n = 2,\ \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1;\ r_1 = \gamma_1,\ r_2 = \gamma_2,\ c_0 = 0.$$

L'équation caractéristique (1) prend la forme suivante:

$$x(x-\gamma_1)(x-\gamma_2) \equiv c_1 x + c_2 x^2 + x^3 = 0.$$

En outre

$$a_0^{r_0} = \alpha + \delta = A, \ a_0^{r_1} = \beta_1, \ a_0^{r_2} = \beta_2,$$

de sorte que $\eta(x)$ s'écrit

$$\eta(x) = A + \beta_1\gamma_1 e^{\gamma_1 x} + \beta_2\gamma_2 e^{\gamma_2 x}.$$

Le système des expressions (6) est donné par

$$A_0^{r_0} = -A, \ A_0^{r_1} = \beta_1\gamma_1 x, \ A_0^{r_2} = \beta_2\gamma_2 x, \ R_1 = -\gamma_1, \ R_2 = -\gamma_2.$$

et d'après l'équation (5) nous arrivons à

$$-\gamma_1 \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \gamma_1} - \gamma_2 \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \gamma_2} + \beta_1\gamma_1 x \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \beta_1} + \beta_2\gamma_2 x \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \beta_2} -$$

$$- A \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial A} = \bar{a}_{x\overline{m}|} \left[(t\,\varphi(x+t))'\right] - \frac{D_{x+m}}{D_x} m\,\varphi(x+m).$$

4. Deuxième loi de Makeham:

$$n = 2; \ \lambda_0 = 2, \ \lambda_1 = 1, \ r_1 = \gamma, \ c_0 = c_1 = 0.$$

L'équation (1) a la forme

$$-\gamma\,\eta''(x) + \eta'''(x) = 0.$$

En outre

$$a_0^{r_0} = \alpha + \delta = A; \ a_1^{r_0} = \beta_1; \ a_0^{r_1} = \beta_2;$$

et $\eta(x)$ s'écrit

$$\eta(x) = A + \beta_1 x + \beta_2\gamma e^{\gamma x}.$$

Pour $A_s^{r_k}$ et R_k nous trouvons donc

$$A_0^{r_0} = -A + \beta_1 x; \ A_1^{r_0} = -2\beta_1; \ A_0^{r_1} = \beta_2\gamma x; \ R_1 = -\gamma$$

et l'équation (5) nous donne

$$-\gamma \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \gamma} + \beta_2\gamma x \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \beta_2} - 2\beta_1 \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \beta_1} -$$

$$-(A - \beta_1 x) \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial A} = \bar{a}_{x\overline{m}|} \left[(t\,\varphi(x+t))'\right] - \frac{D_{x+m}}{D_x} m\,\varphi(x+m).$$

5. Considérons la loi de mortalité définie par

$$\mu_x = \alpha + (\beta_1 + \beta_2 x)\,\gamma e^{\gamma x}.$$

On a alors

$$n = 2; \ \lambda_0 = 1, \ \lambda_1 = 2; \ r_1 = \gamma; \ c_0 = 0, \ c_1 = \gamma^2, \ c^2 = -2\gamma.$$

et l'équation differentielle à laquelle satisfait $\eta(x)$ s'écrit:

$$\gamma^2\,\eta'(x) - 2\gamma\,\eta''(x) + \eta'''(x) = 0.$$

Les valeurs des $a_s^{r_k}$ sont les suivantes:

$$a_0^{r_0} = \alpha + \delta = A; \ a_0^{r_1} = \beta_1, \ a_1^{r_1} = \beta_2$$

et $\eta(x)$ prend la forme

$$\eta(x) = A + (\beta_1 + \beta_2 x)\,\gamma e^{\gamma x}.$$

$A_s^{r_k}$ et R_k sont donc représentés par les expressions

$$A_0^{r_0} = -A;\ A_0^{r_1} = \beta_1\gamma x + \beta_2 x,\ A_1^{r_1} = -\beta_2(1-\gamma x);\ R_1 = -\gamma.$$

Il ressort de l'équation (5) la relation suivante

$$-\gamma\,\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial\gamma} + (\beta_1\gamma x + \beta_2 x)\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial\beta_1} + (\beta_2\gamma x - \beta_2)\,\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial\beta_2} -$$

$$-A\,\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial A} = \bar{a}_{x\overline{m}|}\,[(\varphi(x+t)\,t)'] - \frac{D_{x+n}}{D_x}\,m\,\varphi(x+m).$$

Nous allons maintenant considérer une fonction quelconque des arguments x, $a_s^{r_k}$, r_k $(k = 0, 1, \ldots, i;\ s = 0, 1, \ldots, \lambda_k - 1)$. Sur cette fonction nous allons exécuter l'opération suivante

$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} A_s^{r_k}\,\frac{\partial f}{\partial a_s^{r_k}} + \sum_{k=1}^{i} R_k\,\frac{\partial f}{\partial r_k};$$

et nous désignons le résultat par le symbole $O(f)$. Nous supposons, en outre, que la fonction f peut être dérivée par rapport à a_r^{sk} et r_k.

Il est évident que le symbole $O(f)$ vérifie les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
&O(f_1 + f_2) = O(f_1) + O(f_2),\\
&O(f_1 f_2) = f_2\,O(f_1) + f_1\,O(f_2),\\
&O(g(f)) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f}\,O(f),\\
&O(e^f) = e^f\,O(f).
\end{aligned}$$

L'équation (5) peut être écrite, après l'introduction de ce symbole, de la manière suivante

$$O(\bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)) = \bar{a}_{x\overline{m}|}\,[(t\,\varphi(x+t))'] - \frac{D_{x+m}}{D_x}\,m\,\varphi(x+m). \tag{9}$$

Il ressort de la relation (4)

$$-O\left(\int_0^t \eta(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = t\,\eta(x+t);$$

d'où nous tirons

$$O\left(\frac{D_{x+m}}{Dx}\right) = O\left(e^{-\int_0^m \eta(x+\tau)\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{D_{x+m}}{D_x}\,m\,\eta(x+m). \tag{10}$$

Il résulte de la manière de laquelle nous avons obtenu les équations (7) et (8), que

$$-O[\eta(x+\tau)] = \sum_{s=0}^{\lambda_0-1} a_s^{r_0} \frac{d[\tau(x+\tau)^s]}{d\tau} + \sum_{k=1}^{i} \sum_{s=0}^{\lambda_k-1} r_k\, a_s^{r_k} \frac{d[\tau(x+\tau)^s e^{r_k(x+\tau)}]}{d\tau};$$

si nous y faisons $\tau = 0$, nous arrivons à

$$-O[\eta(x)] = \eta(x). \tag{11}$$

Nous allons encore considérer l'expression $O[\bar{a}'_{x\overline{m}|}(\varphi)]$ où la fonction $\bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\bar{a}'_{x\overline{m}|}(\varphi) = \bar{a}(_{x\overline{m}|}(\varphi)\,\eta(x) - \varphi(x) + \frac{D_{x+m}}{D_x}\varphi(x+m);$$

Nous faisons subir aux deux membres de cette équation l'opération O, et en utilisant les relations (9), (10) et (11) nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} O[\bar{a}'_{x\overline{m}|}(\varphi)] &= \Bigg[\bar{a}_{x\overline{m}|}\,[t\,\varphi(x+t))'] - m\,\varphi(x+m)\frac{D_{x+m}}{D_x} - \\ &\quad - \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)\Bigg]\eta(x) + \varphi(x+m)\, m\,\frac{D_{x+m}}{D_x}\eta(x+m) = \\ &= \bar{a}_{x\overline{m}|}\,(t\,\varphi'(x+t)\,\eta(x) + m\,\varphi(x+m)\frac{D_{x+m}}{D_x}(\mu_{x+m} - \mu_x), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

qui donne pour $\varphi(x+t) \equiv 1$ et $m = \infty$:

$$O(a'_x) = 0.$$

L'expression $\bar{a}_{x\overline{m}|}(t\varphi'(x+t))$ satisfait à l'équation differentielle

$$\bar{a}'_{x\overline{m}|}(t\,\varphi'(x+t)) = \bar{a}_{x\overline{m}|}(t\,\varphi'(x+t)\,\eta(x) + \frac{D_{x+m}}{D_x} m\,\varphi(x+m) - \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi').$$

Nous tirons $\bar{a}_{x\overline{m}|}(t\,\varphi'(x+t))\,\eta(x)$ de (12) et nous arrivons à

$$\begin{aligned} O[\bar{a}'_{x\overline{m}|}(\varphi)] &= \frac{d}{dx}\bar{a}_{x\overline{m}|}(t\,\varphi'(x+t)) + \frac{D_{x+m}}{D_x} m\,\varphi(x+m)\,(\mu_{x+m} - \mu_x) - \\ &\quad - \frac{D_{x+m}}{D_x} m\,\varphi'(x+m) + \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi') = \\ &= \frac{d}{dx}\left[\bar{a}_{x\overline{m}|}(t\,\varphi'(x+t)) - m\,\varphi(x+m)\frac{D_{x+m}}{D_x}\right] + \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi'). \end{aligned}$$

En vertu de la relation (9) nous obtenons

$$O[\bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)] = \frac{d}{dx}[O(\bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi))] - \frac{d}{dx}\bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi) + \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi'), \tag{13}$$

qui peut encore s'écrire à l'aide de la relation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[O(\bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi))] = \sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1}(a^{r_k}_{s+1}(s+1) + a^{r_k}_s \,.\, r_k)\,\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial a^{r_k}_s} + \\ + O(\bar{a}'_{x\overline{m}|}(\varphi)),$$

de la manière suivante:

$$\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial x} = \sum_{s=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1}[a^{r_k}_{s+1}(s+1) + a^{r_k}_s \,.\, r_k]\,\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial a^{r_k}_s} + \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi'). \quad (13')$$

En reprenant le cas de la loi de Makeham, nous déduisons de la relation ainsi obtenue une conséquence relative au deuxième cas particulier considéré plus haut:

$$\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial x} = a_0^{r_1} r_1 \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial a_0^{r_1}} + \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi') = \beta\gamma\,\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \beta} + \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi').$$

Si nous faisons $\varphi \equiv 1$, $m = \infty$ et si nous introduisons les constantes s, g, c nous trouvons

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g} = -\frac{\dfrac{\partial \bar{a}_x}{\partial x}}{g\left(\log \dfrac{1}{g}\right)\log c},$$

qui est une des relations figurant dans l'étude de Friedli.

Nous pouvons également écrire l'équation (3') sous la forme

$$\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial x} = \sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1}\frac{\partial A^{r_k}_s}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial a^{r_k}_s} + \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi'). \quad (13'')$$

Si nous faisons $\varphi \equiv 1$ et si dans les expressions $A^{r_k}_s$ nous écrivons $(x + t)$ au lieu de x, nous arrivons, en vertu de l'équation (5), à

$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1} A^{r_k}_s(x+t)\,\frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{m}|}}{\partial a^{r_k}_s} + \sum_{k=1}^{i} R_k\,\frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{m}|}}{\partial r_k} = \\ = \bar{a}_{x+t,\overline{m}|} - m\,\frac{D_{x+m+t}}{D_{x+t}}. \quad (14)$$

En remarquant que $A^{r_k}_s(x)$ est une fonction linéaire de x, nous pouvons écrire

$$A^{r_k}_s(x+t) = A^{r_k}_s(x) + t\,\frac{\partial A^{r_k}_s(x)}{\partial x}$$

et mettre l'équation (14) sous la forme

$$O(\bar{a}_{x+t,\overline{m}|}) = \bar{a}_{x+t,\overline{m}|} - m\,\frac{D_{x+t+m}}{D_{x+t}} - t\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{\lambda_k-1}\frac{\partial A^{r_k}_s}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{m}|}}{\partial a^{r_k}_s}. \quad (15)$$

Si dans l'équation (13') nous remplaçons x par $(x + t)$ et si nous portons dans l'expression (15) nous arrivons à l'expression ainsi obtenue

$$O(\bar{a}_{x+t,\overline{m}|}) = \bar{a}_{x+t,\overline{m}|} - m\frac{D_{x+t+m}}{D_{x+t}} - t\frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{m}|}}{\partial x}.$$

Si nous y faisons de plus $m = n - t$, nous obtenous

$$O(\bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}) = \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|} - (n-t)\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - t\frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\partial x}. \quad (16)$$

Par l'intermédiaire de cette équation, on peut établir une certaine relation valable pour la réserve d'assurance mixte et d'assurance-décès.

Pour l'assurance mixte, on a

$$(1 - {}_t\bar{V}_x)\,\bar{a}_{x\overline{n}|} = \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}. \quad (17)$$

Si nous effectuons sur les deux membres de cette équation, l'opération O, nous arrivons à

$$-O({}_t\bar{V}_x)\,\bar{a}_{x\overline{n}|} + (1 - {}_t\bar{V}_x)\,O(\bar{a}_{x\overline{n}|}) = O(\bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}). \quad (18)$$

En dérivant l'équation

$$\bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|} = \int_0^{n-t} \frac{l_{x+t+\tau}}{l_{x+t}}\, v^\tau\, \mathrm{d}\tau$$

par rapport à t, nous arrivons à

$$\frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\partial t} = -\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} + \frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\partial x}.$$

Nous portons cette expression dans (16) et puis dans (18) et nous obtenons

$$-O({}_t\bar{V}_x)\,\bar{a}_{x\overline{n}|} + (1 - {}_t\bar{V}_x)\left(\bar{a}_{x\overline{n}|} - n\frac{D_{x+n}}{D_x}\right) =$$

$$= \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|} - \frac{nD_{x+n}}{D_{x+t}} - t\frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\partial t}.$$

Par une légère modification nous déduisons de cette équation:

$$-O({}_t\bar{V}_x) = \frac{1 - {}_t\bar{V}_x}{\bar{a}_{x\overline{n}|}}\, n\,\frac{D_{x+n}}{D_x} - n\frac{D_{x+n}}{\bar{a}_{x\overline{n}|}\, D_{x+t}} + t\frac{\partial\, {}_tV_x}{\partial t}.$$

Pour $n = \infty$ on a

$$-O({}_t\bar{V}_x) = t\frac{\partial\, {}_tV_x}{\partial t},$$

qui représente la relation applicable dans le cas de l'assurance-décès.

Il ressort de l'équation différentielle

$$\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial x} = \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)\,(\mu_x + \delta) - \varphi(x) + \frac{D_{x+m}}{D_x}\,\varphi(x+m)$$

et de l'équation (13′) la relation suivante

$$\sum_{k=0}^{i} \sum_{s=0}^{\lambda_k - 1} \frac{\partial A_s^{r_k}}{\partial x} \frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial a_s^{r_k}} = - A_{x,\overline{m}|}(\varphi) + {}_mE_x\,\varphi(x+m) + \mu_x \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi), \quad (19)$$

si l'on remarque que

$$\bar{A}_{x\overline{m}|}(\varphi) = \varphi(x) - \delta\,\bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi) - \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi'), \text{ et que } {}_mE_x = \frac{D_{x+m}}{D_x}.$$

Pour la loi de Makeham, i. e. pour le deuxième cas particulier, il ressort de l'équation (19) que

$$\beta\gamma\,\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial \beta} = - \bar{A}_{x\overline{m}|}(\varphi) + {}_mE_x\,\varphi(x+m) + \mu_x\,\bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi);$$

si nous introduisons les constantes g et c et si nous faisons $\varphi(x+t) \equiv 1$ nous arrivons à

$$\frac{\mathrm{d}\bar{a}_{x\overline{m}|}}{\mathrm{d}g} = \frac{\bar{A}_{x\overline{m}|} - ({}_mE_x + \mu_x\,\bar{a}_{x\overline{m}|})}{g\left(\log\dfrac{1}{g}\right)\log c},$$

qui est de nouveau une des relations citées dans l'étude de Friedli.

Désignons par le symbole $O_1(f)$ l'opération

$$\sum_{k=0}^{i} \sum_{s=0}^{\lambda_k - 1} \frac{\partial A_s^{r_k}}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial a_s^{r_k}}$$

De l'equation (13″) il résulte

$$\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)}{\partial x} = O_1(\bar{a}_{x\overline{m}|}(\varphi)) + a_{x\overline{m}|}(\varphi')$$

et également

$$\frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}(\varphi)}{\partial x} = O_1(\bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}(\varphi)) + a_{x+t,\overline{n-t}|}(\varphi').$$

En effectuant l'opération O_1 sur chacun des membres de l'équation (17) nous obtenons

$$- O_1({}_t\bar{V}_x)\,\bar{a}_{x\overline{n}|} + (1 - {}_t\bar{V}_x)\,\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{n}|}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\partial x};$$

Nous tirons les dérivées $\dfrac{\partial \bar{a}_{x\overline{n}|}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\partial x}$ des relations

$$\frac{\partial \bar{a}_{x\overline{n}|}}{\partial x} = \bar{a}_{x\overline{n}|}(\mu_x + \delta) - 1 + \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

$$\frac{\partial \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\partial x} = \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}(\mu_{x+t} + \delta) - 1 + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}};$$

et nous arrivons à

$$O_1({}_t\overline{V}_x)\, \bar{a}_{x\overline{n}|} =$$

$$= \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}\left[\mu_x - \mu_{x+t} - \frac{1}{\bar{a}_{x\overline{n}|}} + \frac{1}{\bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}} + \frac{\dfrac{D_{x+n}}{D_x}}{\bar{a}_{x\overline{n}|}} - \frac{\dfrac{D_{x+n}}{D_{x+t}}}{\bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}\right];$$

d'où, après une légère modification, il résulte

$$O_1({}_tV_x)\, \bar{a}_{x\overline{n}|} = -$$

$$-\left[(\mu_{x+t} - \mu_x)\, \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|} - {}_t\overline{V}_x + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{D_{x+n}}{D_x}\,\frac{\bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x\overline{n}|}}\right],$$

ce qui peut encore être écrit de la manière suivante:

$$O_1({}_t\overline{V}_x) = -\frac{(\mu_{x+t} - \mu_x)\, \bar{a}_{x+t,\overline{n-t}|} - {}_t\overline{V}_x + {}_{n-t}E_{x+t}\,[1 - {}_{t|}\bar{p}_{x\overline{n}|}]}{\bar{a}_{x\overline{n}|}} \qquad (20)$$

en posant

$${}_{t|}\bar{p}_{x\overline{n}|} = \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

Pour $n = \infty$ l'équation (20) nous donne:

$$O_1({}_t\overline{V}_x) = -\frac{(\mu_{x+t} - \mu_x)\, \bar{a}_{x+t} - {}_t\overline{V}_x}{\bar{a}_x}.$$

Si nous y faisons

$$(\mu_{x+t} - \mu_x)\, \bar{a}_{x+t} = f(g)$$

et si nous supposons de nouveau qu'il s'agit de la loi de Makeham, nous arrivons à

$$\beta\gamma\,\frac{\partial\, {}_t\overline{V}_x}{\partial \beta} = -\frac{f(g) - {}_t\overline{V}_x}{\bar{a}_x}.$$

En introduisant les constantes g et c nous aboutissont à:

$$\frac{\partial\, {}_t\overline{V}_x}{\partial g} = \frac{f(g) - {}_t\overline{V}_x}{g\left(\log \dfrac{1}{g}\right)(\log c)\, \bar{a}_x};$$

qui est, une fois de plus, une des relations établies dans l'étude de Friedli.